KWARTALNIK FILOZOFICZNY
T. XLIV, Z. 3, 2016
PL ISSN 1230-4050

EUGENIUSZ WOJCIECHOWSKI
(Kraków)

RACHUNEK NAZW I SCHEMAT PREDYKACJI Z *BEGRIFFSSCHRIFT* GOTTLOBA FREGEGO

W *Begriffsschrift* Gottoba Fregego spotykamy się z następującym dwuczęściowym schematem predykacji:

SP1 *Przedmiot x podpada pod pojęcie y*

SP2 *Pojęcie x jest podporządkowane pojęciu y*

Frege rozróżnia wyraźnie dwa stosunki: *podpadanie jednostkowego pod pojęcie* (*Das Fallen eines Einzelnen unter einen Begriff*) i *podporządkowanie jednego pojęcia drugiemu* (*Die Unterordnung eines Begriffes unter einen anderen*)[1].

W liście do Husserla pisze [numeracja i podkreślenie – E.W.][2]:

> Powinniśmy oczyścić logikę albo poprzez
> (1) odrzucenie [dystynkcji] *podmiotu i orzeczenia*, albo poprzez
> (2) zaostrzenie tych pojęć do *relacji podpadania obiektu pod pojęcie* (subsumpcja). Stosunek *podporządkowania jednego pojęcia pod drugie* jest tak

[1] Por. G. Frege, *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, wyd. 2, red. I. Angelelli, Georg Olms Verlag, Hildesheim 1993, s. 99 (dalej: *Begriffsschrif*). Ignazio Angelelli oznacza te stosunki odpowiednio przez: UF – *das Fallen eines Einzelnen unter einen Begriff* (*falling an individual under a concept*) i UO – *Die Unterordnung eines Begriffes unter einen anderen* (*the relation of subordination between two concepts*). Por. I. Angelelli, *Studies on Gottlob Frege and Traditional Philosophy*, Reidel Publishing Company, Dordrecht 1967, s. 7, jak również s. 93 nn.

[2] *Frege an Husserl 30.10.–1.11.1906* [w:] G. Frege, *Wissenschaftliche Briefwechsel*, red. H. Hermas, F. Kambartel, F. Kaulbach, Meiner, Hamburg 1976, s. 92. Cytuję za: A. Gut, *Gottlob Frege i problemy filozofii współczesnej*, Wydawnictwo KUL, Lublin 2005, s. 161. O potrzebie rozróżnienia obu stosunków pisał Frege wcześniej w liście, którego adresatem jest Anton Marty: *Frege an Marty 29.08.1882* [w:]

> różny od tego poprzedniego stosunku, że również i w tym przypadku nie jest dozwolone mówienie o podmiocie i predykacie.

W analizie zdań Frege realizuje punkt (1) powyższej uwagi – odrzuca dystynkcję *podmiot–orzeczenie* (jako logicznie nierelewantną). Preferuje podejście *funkcyjne*: nazwa (jednostkowa) / nazwy (jednostkowe) występujące w zdaniu odnoszą się do przedmiotu/przedmiotów będących argumentem/argumentami funkcji, wyznaczanej przez predykatywną część tego zdania.

Przy takim podejściu realizacja obu schematów wygląda następująco[3]:

SP1a (*Przedmiot*) *x podpada-pod-pojęcie P* – schematycznie – $P(x)$

SP2a *Pojęcie P jest-podporządkowane pojęciu Q* – schematycznie – $\Pi x(P(x) \rightarrow Q(x))$

Jak wiadomo, taka realizacja tych schematów dała ideową podstawę konstrukcji klasycznego rachunku predykatów.

Można zaproponować inną realizację tego schematu predykacyjnego i pójść drugą drogą wspomnianą przez Fregego (2), to jest pozostać przy schemacie klasycznym *podmiot–orzecznik*, poprzez precyzację obu tych relacji: *podpadania obiektu pod pojęcie* oraz *podporządkowania jednego pojęcia pod drugie*. Wybieramy tu tę drogę i zgodnie z nią, realizacja powyższego schematu predykacji będzie wyglądała następująco:

SP1b *Przedmiot x jest podpadający-pod pojęcie y* – schematycznie – $Ox \varepsilon sub(Cy)$

SP2b *Pojęcie x jest podporządkowane pojęciu y* – schematycznie – $Cx \varepsilon sub(Cy)$

Zgodnie z formułami reprezentującymi SP1b i SP2b – $Ox \varepsilon sub(Cy)$ i $Cx \varepsilon sub(Cy)$ – kluczową rolę odgrywają tu funktory *jest* (ε) i *subsumpcji* (*sub*). Funktory pomocnicze: *przedmiot* (*O*) i *pojęcie* (*C*) pozwalają na rozróżnienie obu fraz predykacyjnych.

G. Frege, *Wissenschaftliche Briefwechsel*, s. 163. Por. również w tej sprawie A. Gut, *Gottlob Frege...*, s. 187.

[3] Posługujemy się łącznikiem (-), by podkreślić w danym kontekście fakt logicznej nieanalizowalności danych fraz.

PRELIMINARIA

Ontologia elementarna. Aksjomatem specyficznym **OE** jest:

A0 $x\varepsilon y \leftrightarrow \Sigma z(z\varepsilon x)\wedge\Pi zu(z\varepsilon x\wedge u\varepsilon x \rightarrow z\varepsilon u)\wedge\Pi z(z\varepsilon x \rightarrow z\varepsilon y)$

Do reguł wtórnych, będących bezpośrednimi konsekwencjami aksjomatu A0, należą:

R1 $x\varepsilon y/x\varepsilon x$
R2 $x\varepsilon y\wedge y\varepsilon z/x\varepsilon z$
R3 $x\varepsilon y\wedge y\varepsilon z/y\varepsilon x$

Stałe nazwowe *przedmiotu* i *przedmiotu sprzecznego* są zdefiniowane następująco:

DV	$x\varepsilon \mathrm{V} \leftrightarrow x\varepsilon x$	*x jest przedmiotem*
DΛ	$x\varepsilon \Lambda \leftrightarrow x\varepsilon x\wedge\sim x\varepsilon x$	*x jest przedmiotem-sprzecznym*

Definicyjnie wprowadzone są również funktory istnienia, jedyności, bycia przedmiotem, słabej inkluzji, mocnej inkluzji, identyczności zakresowej i identyczności:

D*ex*	$ex(x) \leftrightarrow \Sigma z(z\varepsilon x)$	*x istnieje*
D*sol*	$sol(x) \leftrightarrow \Pi zu(z\varepsilon x\wedge u\varepsilon x \rightarrow z\varepsilon u)$	*co-najwyżej-jeden-przedmiot-jest x*
D*ob*	$ob(x) \leftrightarrow x\varepsilon x$	*przedmiot x*
D⊂	$x\subset y \leftrightarrow \Pi z(z\varepsilon x \rightarrow z\varepsilon y)$	*x zawiera-się-w y* (*słaba inkluzja*)
D⊏	$x\sqsubset y \leftrightarrow \Sigma z(z\varepsilon x)\wedge\Pi z(z\varepsilon x \rightarrow z\varepsilon y)$	*x zawiera-się-w y* (*mocna inkluzja*)
D○	$x\circ y \leftrightarrow \Pi z(z\varepsilon x \leftrightarrow z\varepsilon y)$	*x jest-zakresowo-identyczne-z y*
D=	$x=y \leftrightarrow x\varepsilon y\wedge y\varepsilon x$	*x jest-identyczne-z y*

Definicje funktorów negacji nazwowej, iloczynu i sumy nazwowej mają postać:

D*n*	$x\varepsilon ny \leftrightarrow x\varepsilon x\wedge\sim x\varepsilon y$	*x jest nie y*
D∩	$x\varepsilon y\cap z \leftrightarrow x\varepsilon y\wedge x\varepsilon z$	*x jest y i z*
D∪	$x\varepsilon y\cup z \leftrightarrow x\varepsilon y\vee x\varepsilon z$	*x jest y lub z*

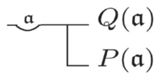
System ontologii elementarnej można ufundować na rachunku predykatów bez identyczności[4].

IDEA

Zgodnie z podejściem Fregego schemat predykacji z *Begriffsschrift* jest u niego dokładnie – zgodnie z symboliką *Begriffsschrift* – oddawany następująco:

(SP1) (*Przedmiot*) *x podpada-pod-pojęcie P* $\boldsymbol{-}\, P(x)$

(SP2) *Pojęcie P jest-podporządkowane pojęciu Q*



W innym miejscu rozróżnienie tych fraz języka naturalnego ujmuje tak[5]:

(SP1) *A subter B* *przedmiot A podpada-pod-pojęcie B*

(SP2) *A sub B* *pojęcie A jest-podporządkowane-pojęciu B*

Jak zauważa Günther Patzig, w tym rozróżnieniu można się dopatrywać antycypacji „prostej teorii typów”[6]. Frege nie docenił nurtu algebraicznego w logice (De’Morgan, Boole, Schröder), który był przez niego krytykowany[7]. Podejście Fregego jeśli chodzi o intuicje wyjściowe – wyrażone w powyższym schemacie predykacji – jest jednak bliższe językowi naturalnemu[8].

---

[4] Oryginalny system ontologii był ufundowany na *prototetyce* – rachunku zdań z kwantyfikatorami. Jako wstęp do ontologii elementarnej można polecić pracę Jerzego Słupeckiego *St. Leśniewski’s calculus of names*, „Studia Logica” 3, 1955, s. 7–70.

[5] G. Frege, *Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik* [w:] tegoż, *Logische Untersuchungen*, wyd. 2, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1976, s. 99. Por. również tamże G. Patzig, *Einleitung*, s. 12n.

[6] Por. tamże, s. 13.

[7] W szczególności wytykał Frege Boole’owi nieuwzględnienie relacji subsumpcji w jego systemie logicznym. Por. G. Frege, *Begriffsschrift*, s. 99. Z interesującym przedstawieniem tych zarzutów można się spotkać w pracy Krzysztofa Rottera, *Kryzys i odrodzenie racjonalnej gramatyki*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1999, s. 276nn.

[8] Choć sama realizacja tego schematu w *Begriffsschrift*, a później w klasycznym rachunku predykatów daje moim zdaniem narzędzie niezbyt poręczne do analizy języka naturalnego.

Podtrzymując powyższy schemat predykacji Fregego, pójdziemy nieco inną drogą.

Zamiast funktorów *subter* (kategorii $s/n(s/n)$) i *sub* (kategorii $s/(s/n)(s/n)$ u niego) posłużymy się (również) funktorem *subsumpcji* (*sub*), lecz o kategorii – n/n. Powyższa dystynkcja obu fraz da się wyrazić przez odwołanie się do funktorów *jest* (ε, kategorii s/nn) oraz dwóch funktorów (kategorii n/n): *przedmiotu* (O) i *pojęcia* (C):

(SP1) *Przedmiot x jest podpadający-pod pojęcie y* – schematycznie – $Ox\varepsilon sub(Cy)$

(SP2) *Pojęcie x jest podporządkowane pojęciu y* – schematycznie – $Cx\varepsilon sub(Cy)$

Jest to podejście preferujące rachunek nazwowy jako narzędzie logiczne.

Niżej zajmiemy się budową takiego narzędzia[9].

ONTOLOGIA ELEMENTARNA ZE SCHEMATEM PREDYKACJI FREGEGO

Zaproponujemy rachunek nazw, będący systemem nadbudowanym nad ontologią elementarną.

Rozszerzymy język ontologii elementarnej o funktor *sub* o kategorii n/n.

Wyrażenie elementarne „$x\varepsilon sub(y)$” będziemy czytali: „*x jest podporządkowane y*”.

Aksjomaty specyficzne tego systemu ($\mathbf{OE}^{sub}$) mają postać:

A1 $x\varepsilon sub(y) \rightarrow sub(x)\subset sub(y)$
A2 $x\varepsilon sub(y) \rightarrow \sim y\subset sub(x)$
A3 $x\varepsilon sub(y) \rightarrow y\varepsilon y$
A4 $sub(x)\subset sub(y) \rightarrow x\subset y$

Definicyjnie wprowadzimy funktor *pojęcie*:

DC $x\varepsilon Cy \leftrightarrow x\varepsilon x\wedge\Pi z(z\varepsilon y \leftrightarrow z\varepsilon sub(x))$ *x jest pojęciem y*

[9] Idee tej pracy były przedstawiane na *Seminarium prof. Ewy Żarneckiej-Biały* (UJ, 26.11.2015). Bardzo dziękuję dr hab. Katarzynie Kijanii-Placek za inspirujące uwagi.

Zgodnie z tą definicją, biorąc pod uwagę stałą *przedmiot* (V), mamy: *jeżeli x jest pojęciem y, to x jest przedmiotem* ($x\varepsilon Cy \rightarrow x\varepsilon \mathrm{V}$). Jest to zgodne z poglądem Fregego, że poprzedzając orzecznik (wyrażenie odnoszące się do pojęcia) słowem *pojęcie*, tworzymy nazwę jednostkową (*Eigenname*), której nie da się użyć predykatywnie[10].

Z uwagi na rozróżnienie *przedmiot–pojęcie* (*subject–concept* / *Gegenstand–Begriff*) w schemacie predykacyjnym Fregego, przyjmiemy definicję funktora *przedmiot*:

D*O* $x\varepsilon Oy \leftrightarrow x\varepsilon y \wedge y\varepsilon y$ *x jest przedmiotem y*

Prostymi konsekwencjami aksjomatów A1–A4 oraz definicji D*O* i D*C* są[11]:

T1.1 $sol(Ox)$

Dem.

(1a)	$\Pi zu.z\varepsilon Ox \wedge u\varepsilon Ox$	[zd1]
(1b)	$z\varepsilon x$	[1a,DO]
(1c)	$u\varepsilon x \wedge x\varepsilon x$	[1a,DO]
(1d)	$z\varepsilon u$	[1c,R3]
(1)	$\Pi zu(z\varepsilon Ox \wedge u\varepsilon Ox \rightarrow z\varepsilon u)$	[1a → 1d]
(2)	$sol(Ox)$	[1,Dsol]

T1.2a $Ox\varepsilon y \rightarrow x\varepsilon y$

Dem.

(1)	$Ox\varepsilon y$	[z]
(2)	$ex(Ox)$	[1,**OE**]
(3)	$Ox \subset y$	[1,**OE**]
(4)	$\Sigma z.z\varepsilon Ox$	[2,Dex]
(5)	$z\varepsilon x \wedge x\varepsilon x$	[4,DO]
(6)	$z=x$	[5,**OE**]
(7)	$z\varepsilon y$	[3,4,D⊂]
(8)	$x\varepsilon y$	[6,7×RE]

[10] G. Frege, *Über Begriff und Gegenstand* [w:] tegoż, *Funktion, Begriff, Bedeutung*, wyd. 6, Vandenhoeck & Ruprecht: Göttingen 1986, s. 66–80, tu s. 71. W polskiej wersji tego tekstu *Pojęcie i przedmiot* [w:] G. Frege, *Pisma semantyczne*, przeł. B. Wolniewicz, PWN, Warszawa 1977, s. 45–59, tu s. 51.

[11] Odwoływanie się w dowodach do elementarnych tez ontologii elementarnej będzie sygnalizowane krótko przez **OE**, a do klasycznego rachunku zdań przez **KRZ**. Korzystać też będziemy z reguły ekstensjonalności dla identyczności (RE). W dowodach wyrażenia „z”, „zd”, „zdn” i „sprz.” są odpowiednio skrótami wyrażeń: „założenie”, „założenie dodatkowe”, „założenie dowodu nie wprost” i „sprzeczność”.

T1.2b $x\varepsilon y \rightarrow Ox\varepsilon y$

Dem.

(1)	$x\varepsilon y$	[z]
(2)	$x\varepsilon x$	[1×R1]
(3)	$\Sigma z.z\varepsilon x$	[2]
(4)	$z\varepsilon Ox$	[2,3,D*O*]
(5)	$ex(Ox)$	[4,D*ex*]
(6)	$Ox\varepsilon Ox$	[T1.1,5,**OE**]
(7a)	$\Pi z.z\varepsilon Ox$	[zd1]
(7b)	$z\varepsilon x$	[7a,D*O*]
(7c)	$z\varepsilon y$	[1,7b×R2]
(7)	$\Pi z(z\varepsilon Ox \rightarrow z\varepsilon y)$	[7a → 7c]
(8)	$Ox\subset y$	[7,D⊂]
(9)	$Ox\varepsilon y$	[6,8,**OE**]

T1.2 $Ox\varepsilon y \leftrightarrow x\varepsilon y$ [T1.2a,T1.2b]

T1.3 $OOx\varepsilon y \leftrightarrow Ox\varepsilon y$ [T1.2]

T1.4 $x\varepsilon OOy \leftrightarrow x\varepsilon Oy$ [D*O*,T1.2]

T2.1 $x\varepsilon sub(y) \wedge y\varepsilon sub(z) \rightarrow x\varepsilon sub(z)$

Dem.

(1)	$x\varepsilon sub(y)$	[z]
(2)	$y\varepsilon sub(z)$	[z]
(3)	$sub(y)\subset sub(z)$	[2,A1]
(4)	$x\varepsilon sub(z)$	[1,3,D⊂]

T2.2 $\sim x\varepsilon sub(x)$

Dem.

(1)	$x\varepsilon sub(x)$	[zdn]
(2)	$x\subset sub(x)$	[1,**OE**]
(3)	$\sim x\subset sub(x)$	[1,A2]
	sprz.	[2,3]

T2.3 $\sim x\varepsilon Cx$

Dem.

(1)	$x\varepsilon Cx$	[zdn]
(2)	$\Pi z(z\varepsilon x \rightarrow z\varepsilon sub(x))$	[1,D*C*]
(3)	$x\varepsilon x$	[1×R1]

(4)	$x\varepsilon sub(x)$	[2,3]
(5)	$\sim x\varepsilon sub(x)$	[T2.2]
	sprz.	[4,5]

T2.4 $x\varepsilon Cy \wedge z\varepsilon Cy \rightarrow x\varepsilon z$

Dem.

(1)	$x\varepsilon Cy$	[z]
(2)	$z\varepsilon Cy$	[z]
(3)	$\Pi u(u\varepsilon y \leftrightarrow u\varepsilon sub(x))$	[1,D*C*]
(4)	$\Pi u(u\varepsilon y \leftrightarrow u\varepsilon sub(z))$	[2,D*C*]
(5)	$\Pi u(u\varepsilon sub(x) \rightarrow u\varepsilon sub(z))$	[3,4]
(6)	$sub(x) \subset sub(z)$	[5,D⊂]
(7)	$x \subset z$	[6,A4]
(8)	$x\varepsilon x$	[1×R1]
(9)	$x\varepsilon z$	[7,8,D⊂]

T2.5 $sol(Cx)$ [T2.4,D*sol*]

T2.6 $OCx\varepsilon y \leftrightarrow Cx\varepsilon y$ [T1.2]

T2.7 $x\varepsilon OCy \leftrightarrow x\varepsilon Cy$ [D*O*,D*ex*,T2.5,**OE**]

T3.1 $Cx\varepsilon Cy \leftrightarrow Cx\varepsilon Cx \wedge \Pi z(z\varepsilon y \leftrightarrow z\varepsilon sub(Cx))$ [D*C*]

T3.2 $Cx\varepsilon Cx \leftrightarrow ex(Cx) \wedge \Pi z(z\varepsilon x \leftrightarrow z\varepsilon sub(Cx))$ [T2.5,T3.1,**OE**]

T3.3 $\sim Cx\varepsilon x$

Dem.

(1)	$Cx\varepsilon x$	[zdn]
(2)	$Cx\varepsilon Cx$	[1×R1]
(3)	$\Pi z(z\varepsilon x \rightarrow z\varepsilon sub(Cx))$	[2,T3.2]
(4)	$Cx\varepsilon sub(Cx)$	[1,3]
(5)	$\sim Cx\varepsilon sub(Cx)$	[T2.2]
	sprz.	[4,5]

T3.4 $Cx\varepsilon Cy \rightarrow Cx=Cy$

Dem.

(1)	$Cx\varepsilon Cy$	[z]
(2)	$ex(Cy)$	[1,D*ex*,T3.2,**OE**]
(3)	$sol(Cy)$	[T2.5]

(4)	$Cy\varepsilon Cy$	[2,3,**OE**]
(5)	$Cy\varepsilon Cx$	[1,4×R3]
(6)	$Cx=Cy$	[1,5,D=]

T3.5 $x\varepsilon sub(Cy) \to x\varepsilon y$

Dem.

(1)	$x\varepsilon sub(Cy)$	[z]
(2)	$Cy\varepsilon Cy$	[1,A3]
(3)	$\Pi z(x\varepsilon y \leftrightarrow z\varepsilon sub(Cy))$	[2,T3.2]
(4)	$x\varepsilon y$	[1,3]

T3.6 $Cx\varepsilon sub(Cy) \to x\subset y$

Dem.

(1)	$Cx\varepsilon sub(Cy)$	[z]
(2a)	$\Pi z.z\varepsilon x$	[zd1]
(2b)	$Cx\varepsilon Cx$	[1×R1]
(2c)	$\Pi u(u\varepsilon x \to u\varepsilon sub(Cx))$	[2b,T3.2]
(2d)	$z\varepsilon sub(Cx)$	[2a,2c]
(2e)	$z\varepsilon sub(Cy)$	[1,2d,T2.1]
(2f)	$z\varepsilon y$	[2e,T3.5]
(2)	$\Pi z(z\varepsilon x \to z\varepsilon y)$	[2a → 2f]
(3)	$x\subset y$	[2,D⊂]

T3.7 $x\varepsilon x\wedge Cx\varepsilon sub(Cy) \to x\varepsilon y$ [T3.6,**OE**]

T3.8 $x\varepsilon x\wedge Cx\varepsilon sub(Cy) \to x\varepsilon sub(Cy)$

Dem.

(1)	$x\varepsilon x$	[z]
(2)	$Cx\varepsilon sub(Cy)$	[z]
(3)	$Cx\varepsilon Cx$	[2×R1]
(4)	$\Pi z(z\varepsilon x \leftrightarrow z\varepsilon sub(Cx))$	[3,T3.2]
(5)	$x\varepsilon sub(Cx)$	[1,4]
(6)	$x\varepsilon sub(Cy)$	[2,5,T2.1]

Teza ta w odróżnieniu od tezy T3.7, będącej szczególnym przypadkiem tezy T3.6, wyraża to, że jeśli pojęcie x jest pojęciem jednostkowym ($x\varepsilon x$), to stosunek subalternacji przechodzi w stosunek subsumpcji. W tego typu sytuacji, gdy mamy do czynienia z subalternacją między pojęciem jednostkowym a drugim pojęciem (zazwyczaj niejednostkowym), Frege, by podkreślić różnicę między stosunkiem subsumpcji a stosunkiem subalternacji, zamiast frazy *pojęcie* (*jednostkowe*) *x jest podporządkowane* (*ist untergeordnet*) *pojęciu y* – zgodnie z pracą *Über Begriff und Gegenstand* – użyłby frazy *pojęcie x wpada w* (*fällt in*) *pojęcie y*[12].

T3.9 $CO x \varepsilon y \rightarrow C x \varepsilon y$

Dem.

(1)	$CO x \varepsilon y$	[z]
(2)	$CO x \varepsilon CO x$	[1×R1]
(3)	$ex(Ox)$	[2,T3.2]
(4)	$\Pi z(z \varepsilon Ox \leftrightarrow x \varepsilon sub(COx))$	[2,T3.2]
(5)	$sol(Ox)$	[T1.1]
(6)	$Ox \varepsilon Ox$	[3,5,**OE**]
(7)	$Ox \varepsilon sub(COx)$	[4,6]
(8)	$x \varepsilon sub(COx)$	[7,T1.2]
(9)	$x \varepsilon Ox$	[8,T3.5]
(10)	$Ox \varepsilon x$	[6,9×R3]
(11)	$x = Ox$	[9,10,D=]
(12)	$Cx \varepsilon y$	[1,11×RE]

T4.1 $x \varepsilon Cy \rightarrow {\sim} x \varepsilon y$

Dem.

(1)	$x \varepsilon Cy$	[z]
(2)	$x \varepsilon y$	[zdn]
(3)	$\Pi z(z \varepsilon y \rightarrow z \varepsilon sub(x))$	[1,D*C*]
(4)	$x \varepsilon sub(x)$	[2,3]
(5)	${\sim} x \varepsilon sub(x)$	[T2.2]
	sprz.	[4,5]

T4.2 $Cx \varepsilon Cy \rightarrow {\sim} Cx \varepsilon y$ [T4.1]

T4.3 $CCx \varepsilon y \rightarrow {\sim} x \subset Cx$

Dem.

(1)	$CCx \varepsilon y$	[z]
(2)	$CCx \varepsilon CCx$	[1×R1]
(3)	$\Pi z(z \varepsilon Cx \rightarrow z \varepsilon sub(CCx))$	[2,T3.2]

[12] Por. G. Frege, *Über Begriff und Gegenstand*, s. 76. Bogusław Wolniewicz w polskiej wersji tego tekstu słusznie opatruje ten fragment (*Pojęcie i przedmiot*, s. 56) komentarzem, że zarówno niemieckie „*fällt in*”, jak i polskie „*wpada*” brzmią sztucznie. Zaznacza dalej, że tylko w tym jednym miejscu Frege się takim określeniem posłużył.

(4)	$\sim CCx\varepsilon Cx$	[2,T4.2]
(5)	$\sim CCx\varepsilon CCx \vee \sim \Pi z(z\varepsilon x \rightarrow z\varepsilon sub(CCx))$	[4,T3.1]
(6)	$\Sigma z.z\varepsilon x \wedge \sim z\varepsilon sub(CCx)$	[2,5]
(7)	$\quad z\varepsilon x \wedge \sim z\varepsilon Cx$	[3,6]
(8)	$\sim x \subset Cx$	[7,D⊂]

T4.4 $Cx\varepsilon y \rightarrow \sim y \subset x$

Dem.

(1)	$Cx\varepsilon y$	[z]
(2)	$Cx\varepsilon Cx$	[1×R1]
(3)	$\Pi z(z\varepsilon x \rightarrow z\varepsilon sub(Cx))$	[3,T3.2]
(4)	$\sim Cx\varepsilon Cy$	[1,T4.2]
(5)	$\sim Cx\varepsilon Cx \vee \sim \Pi z(z\varepsilon y \rightarrow z\varepsilon sub(Cx))$	[4,T3.1]
(6)	$\Sigma z.z\varepsilon y \wedge \sim z\varepsilon sub(Cx)$	[2,5]
(7)	$\quad z\varepsilon y \wedge \sim z\varepsilon x$	[3,6]
(8)	$\sim y \subset x$	[7,D⊂]

T4.5 $x\varepsilon Cy \wedge x\varepsilon Cz \rightarrow x\varepsilon C(y \cap z)$

Dem.

(1)	$x\varepsilon Cy$	[z]
(2)	$x\varepsilon Cz$	[z]
(3)	$x\varepsilon x$	[1×R1]
(4)	$\Pi u.u\varepsilon y \leftrightarrow u\varepsilon sub(x)$	[1,D*C*]
(5)	$\quad u\varepsilon z \leftrightarrow u\varepsilon sub(x)$	[2,D*C*]
(6)	$\quad u\varepsilon y \wedge u\varepsilon z \leftrightarrow u\varepsilon sub(x)$	[4,5]
(7)	$\quad u\varepsilon y \cap z \leftrightarrow u\varepsilon sub(x)$	[6,D∩]
(8)	$x\varepsilon C(y \cap z)$	[3,7,D*C*]

T4.6 $x\varepsilon Cy \wedge x\varepsilon Cz \rightarrow y \circ z$

Dem.

(1)	$x\varepsilon Cy$	[z]
(2)	$x\varepsilon Cz$	[z]
(3)	$x\varepsilon x$	[1×R1]
(4)	$\Pi u.u\varepsilon y \leftrightarrow u\varepsilon sub(x)$	[1,D*C*]
(5)	$\quad u\varepsilon z \leftrightarrow u\varepsilon sub(x)$	[2,D*C*]
(6)	$\quad u\varepsilon y \leftrightarrow u\varepsilon z$	[4,5]
(7)	$y \circ z$	[6,D○]

T4.7 $x\varepsilon Cy \wedge x\varepsilon Cz \rightarrow Cy = Cz$

Dem.

(1)	$x\varepsilon Cy$	[z]
(2)	$x\varepsilon Cz$	[z]
(3)	$x=Cy$	[1,T2.5,**OE**]
(4)	$x=Cz$	[2,T2.5,**OE**]
(5)	$Cy=Cz$	[3,4,**OE**]

T4.8 $x\varepsilon sub(Cy)\wedge x\varepsilon sub(Cz) \rightarrow x\varepsilon y\cap z$

Dem.

(1)	$x\varepsilon sub(Cy)$	[z]
(2)	$x\varepsilon sub(Cz)$	[z]
(3)	$x\varepsilon y$	[1,T3.5]
(4)	$x\varepsilon z$	[2,T3.5]
(5)	$x\varepsilon y\cap z$	[3,4,D∩]

T4.9 $x\varepsilon sub(Cy)\vee x\varepsilon sub(Cz) \rightarrow x\varepsilon y\cup z$ [T3.5,D∪]

Wprowadzimy funktor *est* odpowiadający klasycznej predykacji:

D*est* $x\ est\ y \leftrightarrow (x\varepsilon sub(Cy)\vee Cx\varepsilon sub(Cy))\wedge{\sim}y\subset x$

Człon ${\sim}y\subset x$ w tej definicji ma zapewnić niezwrotność funktora *est*. Jego bezpośrednią konsekwencją jest też niepustość orzecznika y i nieuniwersalność x (${\sim}y\subset x \rightarrow ex(y)\wedge ex(nx)$).
Do tez charakteryzujących ten funktor, będących konsekwencjami tej definicji, należą:

T5.1 $x\ est\ y \rightarrow x\subset y$ [D*est*,T3.5,**OE**,T3.6]

T5.2 ${\sim}x\ est\ x$

Dem.

(1)	$x\ est\ x$	[zdn]
(2)	${\sim}x\subset x$	[1,D*est*]
(3)	$x\subset x$	[**OE**]
	sprz.	[2,3]

T5.3 $x\ est\ y \rightarrow {\sim}y\ est\ x$

Dem.

(1)	$x\ est\ y$	[z]

(2)	$y\ est\ x$	[zdn]
(3)	$x\varepsilon sub(Cy)\vee Cx\varepsilon sub(Cy)$	[1,D*est*]
(4)	$y\varepsilon sub(Cx)\vee Cy\varepsilon sub(Cx)$	[2,D*est*]
(5)	$\sim y\subset x$	[1,D*est*]
(6)	$Cy\varepsilon sub(Cx)$	[4,5,T3.5,**OE**]
(7)	$(x\varepsilon sub(Cy)\wedge Cy\varepsilon sub(Cx))\vee$ $(Cx\varepsilon sub(Cy)\wedge Cy\varepsilon sub(Cx))$	[3,6]
(7a)	$x\varepsilon sub(Cy)\wedge Cy\varepsilon sub(Cx)$	[zd1]
(7b)	$y\subset x$	[7a,T3.6]
	sprz.	[5,7b]
(8a)	$Cx\varepsilon sub(Cy)\wedge Cy\varepsilon sub(Cx)$	[zd2]
(8b)	$Cx\varepsilon sub(Cx)$	[8a,T2.1]
(8c)	$Cx\varepsilon x$	[8b,T3.5]
(8d)	$\sim Cx\varepsilon x$	[T3.3]
	sprz.	[8c,8d]

T5.4 $x\ est\ y\wedge y\ est\ z \rightarrow x\ est\ z$

Dem.

(1)	$x\ est\ y$	[z]
(2)	$y\ est\ z$	[z]
(3)	$x\varepsilon sub(Cy)\vee Cx\varepsilon sub(Cy)$	[1,D*est*]
(4)	$y\varepsilon sub(Cz)\vee Cy\varepsilon sub(Cz)$	[2,D*est*]
(5)	$\sim y\subset x$	[1,D*est*]
(6)	$\sim z\subset y$	[2,D*est*]
(7)	$(x\varepsilon sub(Cy)\wedge y\varepsilon sub(Cz))\vee(x\varepsilon sub(Cy)\wedge$ $Cy\varepsilon sub(Cz))\vee(Cx\varepsilon sub(Cy)\wedge y\varepsilon sub(Cz))\vee$ $(Cx\varepsilon sub(Cy)\wedge Cy\varepsilon sub(Cz))$	[3,6]
(8)	$x\varepsilon sub(Cz)\vee Cx\varepsilon sub(Cz)$	[7,T3.5,**OE**,T2.1]
(9)	$z\subset x\vee\sim z\subset x$	[**KRZ**]
(10a)	$z\subset x$	[zd1]
(10b)	$x\subset z$	[8,T3.5,**OE**,T3.6]
(10c)	$x\circ z$	[10a,10b,**OE**]
(10d)	$x\varepsilon z\vee Cx\varepsilon z$	[8,T3.5]
(10e)	$x=z\vee Cx\varepsilon x$	[10c,10d,**OE**]
(10f)	$x=z$	[10e,T3.3]
(10g)	$y\ est\ x$	[2,10f×RE]
(10h)	$\sim y\ est\ x$	[T5.3,1]
	sprz.	[10g,10h]
(10)	$\sim z\subset x$	[9,10a → sprz.]
(11)	$x\ est\ z$	[8,10,D*est*]

T5.5 $\sim$V *est x*

Dem.

(1)	V *est x*	[zdn]
(2)	$\sim x \subset$V	[1,D*est*]
(3)	$x \subset$V	[**OE**]
	sprz.	[2,3]

T5.6 $\sim$*x est* Λ

Dem.

(1)	*x est* Λ	[zdn]
(2)	$\sim\Lambda \subset x$	[1,D*est*]
(3)	$\Lambda \subset x$	[**OE**]
	sprz.	[2,3]

Wyrażenia elementarne typu *x est y* można interpretować jako rozszerzenie sylogistycznych zdań ogólnotwierdzących (*xay*) w ujęciu tzw. *sylogistyki dowodowej* o zdania jednostkowe[13].

NIESPRZECZNOŚĆ SYSTEMU I NIEZALEŻNOŚĆ AKSJOMATÓW

Niesprzeczność systemu (**OE**^{sub}) z aksjomatami A1, A2, A3 i A4 ustalimy za pomocą interpretacji I^0, którą traktujemy tu jako interpretację standardową. Niezależność tych aksjomatów przeprowadzimy odpowiednio przez interpretacje I^1, I^2, I^3 i I^4. Ustalenie niezależności danego aksjomatu od pozostałych aksjomatów aksjomatyki przy tej metodzie polega – jak wiadomo – na podaniu takiej interpretacji, przy której dany aksjomat jest fałszywy, a pozostałe aksjomaty prawdziwe. Interpretacje te mają miejsce w czterowartościowym rachunku zdaniowym. Odpowiedniki funktorów dwuargumentowych występujących w tej aksjomatyce, w danej interpretacji, oznaczymy w notacji Łukasiewicza. Matryca funktora jednoargumentowego będzie przedstawiana w formie skróconej [*abcd*], gdzie *a*, *b*, *c*, *d* są jego wartościami – odpowiednio dla wartości jego argumentu – 1, 2, 3 i 4.

Funktory logiczne implikacji (→) i negacji (~) są tu interpretowane odpowiednio przez: *C* i *N* (o matrycy [4321]). Interpretacje te są zestawione w poniższej tabeli:

---

[13] W szczególności tezom T5.2–T5.4 odpowiadają formuły: $\sim xax$, $xay \rightarrow \sim yax$ i $xay \wedge yaz \rightarrow xaz$ sylogistyki dowodowej. W pracy Piotra Kulickiego *Aksjomatyczne systemy rachunku nazw* (Wydawnictwo KUL, Lublin 2011, s. 148nn) formuły te są przyjęte jako aksjomaty, charakteryzujące ten funktor w sylogistyce dowodowej.

Opis		Interpretacja		
		ε	~	*sub*
I^0	Niesprzeczność	*K*	*NC*	[4444]
I^1	Niezależność A1	*K*	*NK*	[1234]
I^2	Niezależność A2	*C*	*C*	[1234]
I^3	Niezależność A3	*NC'*	*C*	[1234]
I^4	Niezależność A4	*NC*	*C*	[1111]

Matryce dla funktorów implikacji, koniunkcji, negacji implikacji, negacji implikacji odwrotnej i negacji koniunkcji są ujęte w poniższej tabeli:

p/*q*	*C*	*K*	*NC*	*NC'*	*NK*
	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4
1	1 2 3 4	1 2 3 4	4 3 2 1	4 4 4 4	4 3 2 1
2	1 1 3 3	2 2 4 4	4 4 4 4	3 4 3 4	3 3 1 1
3	1 2 1 2	3 4 3 4	4 3 4 3	2 2 4 4	2 1 2 1
4	1 1 1 1	4 4 4 4	4 4 4 4	1 2 3 4	1 1 1 1

Przykładowo, gdy pierwszy argument (*p*) jest równy 2, a drugi (*q*) jest równy 3, to zgodnie z tą tabelą: *C*23=3 i *K*23=4. Wyróżnioną wartością jest wartość 1.

UWAGI KOŃCOWE

W przedstawionej konstrukcji logicznej najważniejszym zdaniem elementarnym występującym w aksjomatyce specyficznej (A1–A4) jest zdanie typu: $x\varepsilon sub(y)$, oddające stosunek subsumpcji. Koresponduje to z przekonaniem Fregego[14]:

> Podstawowym stosunkiem logicznym jest stosunek podpadania przedmiotu pod pojęcie; wszystkie stosunki pojęć się do niego sprowadzają.

Wybierając rachunek nazw – ontologię elementarną – jako bazę logiczną naszego systemu, pokazaliśmy, jak potencjalnie mocne są kon-

[14] Por. G. Frege, *Ausführungen über Sinn und Bedeutung* [w:] tegoż, *Nachgelassene Schriften*, red. H. Hermes, F. Kambartel, F. Kaulbach, Felix Meiner Verlag, Hamburg 1969, s. 128–135, tu s. 128. Po polsku: *Z uwag o sensie i znaczeniu* (fragmenty) [w:] G. Frege, *Pisma semantyczne*, PWN, Warszawa 1977, s. 130–132, tu s. 131.

strukcje logiczne z szerokim rozumieniem kategorii nazw. Frazy podstawowe schematu predykacyjnego z *Begriffschrift* Fregego (SP1 i SP2) są w naszym ujęciu szczególnymi przypadkami formuły $x\varepsilon sub(y)$.

THE CALCULUS OF NAMES AND PREDICATION SCHEME FROM GOTTLOB FREGE'S *BEGRIFFSSCHRIFT*

Summary

In Gottlob Frege's *Begriffsschrift* we can find the following two-part predication scheme:

SP1 *Object x falls under concept y*

SP2 *Concept x is subordinated to concept y*

We have to do here with two logical relations: subsumption (SP1) and subalternation (SP2). The work proposes a formulation of both these relations in the framework of the calculus of names, which is an extension of elementary ontology (**OE**) to include the axioms:

A1 $x\varepsilon sub(y) \rightarrow sub(x)\subset sub(y)$
A2 $x\varepsilon sub(y) \rightarrow \sim y\subset sub(x)$
A3 $x\varepsilon sub(y) \rightarrow y\varepsilon y$
A4 $sub(x)\subset sub(y) \rightarrow x\subset y$

The functors of object and concept are introduced by definition:

DO $x\varepsilon Oy \leftrightarrow x\varepsilon y \wedge y\varepsilon y$ *x is object y*
DC $x\varepsilon Cy \leftrightarrow x\varepsilon x \wedge \Pi z(z\varepsilon y \leftrightarrow z\varepsilon sub(x))$ *x is concept y*

The above relations are here expressed in the following way:

$Ox\varepsilon sub(Cy)$ *subsumption*
$Cx\varepsilon sub(Cy)$ *subalternation*

The work gives the proof of consistency of this construction and proof of independence of axioms (A1–A4) by interpretation in a quadrivalent propositional calculus.

Eugeniusz Wojciechowski