KWARTALNIK FILOZOFICZNY
T. XLII, Z. 1, 2014
PL ISSN 1230-4050

EUGENIUSZ SZUMAKOWICZ
(Kraków)

O DOWODZIE MATEMATYCZNYM BARDZIEJ ŹRÓDŁOWO

Chodzi o istotny sens dowodu matematycznego, o źródło wiarygodności podstawowej „cegiełki" najściślejszej z nauk. Jeden z głównych fundatorów warszawskiej szkoły matematycznej, Zygmunt Janiszewski, powiadał: „Zajmuję się matematyką, żeby się dowiedzieć jak daleko dojść można samym czystym rozumowaniem". Refleksja filozoficzna ma na celu zgłębienie natury i struktury tego dochodzenia do prawdy matematycznej. Tymczasem w XX wieku namnożyło się mnóstwo nieporozumień i naiwności interpretacyjnych, jeśli chodzi o to, co naprawdę w matematyce się dzieje. W konsekwencji matematycy zaczęli coraz częściej uważać filozofów, w szczególności filozofów matematyki, za ludzi, którzy nie rozjaśniają tego, co dzieje się w matematyce, lecz wręcz przeciwnie, zaciemniają. Sam tego doświadczyłem, przebywając nierzadko w środowisku autentycznych (tzw. zwykłych, normalnych) matematyków. No bo czy dobra, adekwatna filozofia matematyki może być nieakceptowana przez matematyków samych? Uważam zdecydowanie, że nie. Matematyk dzięki filozofii powinien lepiej rozumieć to, co robi niejako żywiołowo.

Poniżej przedstawiam ciąg uwag i konstatacji filozoficzno-matematycznych. Są one dość zwięzłe, po to, żeby ewentualny czytelnik matematyk nie stracił cierpliwości:

1. Pierwszorzędna jest kwestia sztuczności rozłącznego podziału elementów matematyki na formalne reguły inferencji oraz treściowe fakty matematyczne. W naturalnym rozumowaniu matematycznym ten podział się zupełnie nie uwidacznia. Rozważmy prosty, ale reprezen-

tatywny przykład. *Jeśli liczba naturalna jest podzielna przez cztery, to jest ona podzielna przez dwa.* Bystrzejszy uczeń na szkolnej lekcji matematyki zauważy, że liczba podzielna przez 4 to liczba mająca arytmetyczną postać 4k. Ale 4 = 2 × 2, więc rozpatrywana liczba ma postać (2 × 2)k = 2 × (2 × k) = 2k', czyli jest to liczba podzielna przez 2, *cbdo*. Zapytajmy teraz: gdzie w tym okresie warunkowym występuje logika formalna? Żeby jej się doszukać, należałoby powyższą dedukcję sformalizować na gruncie systemu aksjomatycznego Peano (lub jakiegoś podobnego). Można się dalej pytać, komu taka pełna formalizacja jest potrzebna. Na pewno nie teoretykom liczb. Zapewne arytmetykom teoretycznym (badaczom formalnologicznych podstaw teorii liczb), którzy wszakże nie zajmują się liczbami i ich własnościami, lecz własnościami sformalizowanych systemów teorii liczb. Niektórzy tę drugą dziedzinę nazywają nawet „filozofią matematyki", ale przecież naturalnym jest oczekiwanie, że filozofia matematyki będzie źródłowo bliska matematyce samej. Ogólniej, dotyczy to każdej relacji: dziedzina nauki – filozofia tej dziedziny nauki.

Matematycy nie potrzebują uczyć się logiki formalnej, żeby przeprowadzać poprawne rozumowania matematyczne. Wystarczy, że uczą się samej matematyki. Oczywiście nie wynika z tego, że logika formalna jest dyscypliną bezwartościową, jednak jej wartość jest immanentna i ogólnopoznawcza[1]. W relacji z matematyką to bardziej matematyka jest potrzebna logice (logika matematyczna – matematyczne ujmowanie schematów formalno logicznych) niż logika matematyce (matematyce matematyków!).

Zaprezentowana na początku implikacja wiążąca dwa zdania o podzielności liczb wpisuje się bardziej w pojęcie czy schemat implikacji ścisłej (A implikuje B = nie jest *możliwe*, że A i nieB) niż w schemat implikacji materialnej (A implikuje B = nie jest *prawdą*, że A i nieB), jednak rozbudowywane przez już dziesiątki lat formalne rachunki logiki modalnej nie okazały się przydatne w praktyce rozumowań i twórczości matematycznej. Są po prostu metateoretyczną ciekawostką o wartości samej dla siebie.

Nieco parafrazując wypowiedź znanego polskiego matematyka (odkrywcy talentu Stefana Banacha) Hugona Steinhausa, powiedzmy:

---

[1] Interesujące badania z tego zakresu przedstawia studium E. Wojciechowskiego, *Teoria zdań warunkowych inspirowana pewnymi ideami Romana Ingardena*, „Kwartalnik Filozoficzny", t. XXXIX, z. 4, 2011, s. 61–72. Moim zdaniem, logika formalna, w odpowiednio aplikacyjnym ujęciu, może odegrać dużo większą rolę w naukach społecznych niż w naukach matematycznych.

Matematyka to zawsze coś innego (Mathematics is always something else)[2]. Wobec poprzednich rozważań można by powiedzieć: *dowód matematyczny jest zawsze czymś innym!*

Różnorodność matematycznej natury dowodów matematycznych można zilustrować następującą typologią dość egzotycznych przypadków. Informatyczny dowód matematyczny, czysto matematyczny! Jest to oczywiście (dla śledzących postępy matematyki w ostatnich czasach) dowód słynnego (jeszcze w XIX wieku) twierdzenia o czterech barwach wystarczających do pokolorowania każdej mapy geograficznej. Metamatematyczny dowód matematyczny. Przykładów tego typu ścieżki dowodowej nie jest wiele, ale odcisnęły one pewne piętno na obrazie współczesnej matematyki. Bardziej szczegółowo piszę o tym w innym miejscu[3]. Fizykalny dowód matematyczny. Fizykalny a nie fizyczny, bo nie chodzi o dowodzenie matematyczne za pomocą urządzenia czy obiektu fizycznego, lecz o stosowanie przesłanek z zakresu nauki fizyki i to raczej fizyki teoretycznej. Na przykład dowodzenie pewnych twierdzeń topologii algebraicznej w oparciu o wyniki kwantowej teorii pola. Jest to pewne *novum* ostatnich lat. Jednak jeszcze przed wojną sławny matematyk Pólya miał usłyszeć od wybitnego teoretyka liczb Edmunda Landaua pytanie: „Czy sądzi Pan, że istnieją jakiekolwiek *fizyczne* przesłanki na to, iż hipoteza Riemanna mogłaby być prawdziwa?”. Wiadomo, że interesował się tym zagadnieniem sam Dawid Hilbert, ale brak jest konkretnych danych o jego poglądach w tej kwestii[4].

2. W kontekście dociekań prawdziwego sensu dowodu matematycznego nie sposób nie poruszyć kwestii prawdziwego sensu i znaczenia dla matematyki słynnego twierdzenia Kurta Gödla o niezupełności. Pozwolę sobie w tym miejscu na osobiste wyznanie, oczywiście o charakterze intelektualnym. Otóż przez szereg lat, za wieloma innymi, ulegałem złudzeniu, iż twierdzenie Gödla ma kolosalne znaczenie dla filozofii matematyki, filozofii umysłu czy filozofii w ogóle. Spotykałem się w literaturze również ze stwierdzeniami typu, że „jest to najważniejsze twierdzenie dwudziestowiecznej matematyki” (sic!).

---

[2] Zob. H. Steinhaus, *Słownik racjonalny*, Ossolineum, s. 75.

[3] Zob. E. Szumakowicz, *Intelektualny spacer po matematyce z domieszką filozofii*, Wyd. Nauk. PK, Kraków 2011. Rozdz. VIII. 2: *Niespodziewane związki pojęciowe. Zastosowania metamatematyki do matematyki*, str. 231–234.

[4] Zob. J. Derbyshire, *Obsesja liczb pierwszych. Bernhard Riemann i największy nierozwiązany problem w matematyce*, Wydawnictwo NAKOM, Poznań 2009, s. 306.

W środowisku filozofii nauki traktującej tę ostatnią bardziej realistycznie (późny Wittgenstein, Hilary Putnam) mogą one wywoływać naturalne odreagowania, że coś jest nie tak z tymi bombastycznymi konstatacjami, że to jest jakiś rodzaj intelektualnej reklamy czy marketingu na rzecz wirtualnej filozofii nauki. Tak zwani „zwykli" matematycy odnosili się do tego rodzaju enuncjacji z kurtuazją i uprzejmym dystansem, nazywając twierdzenie Gödla twierdzeniem ideologicznym lub światopoglądowym i sprawę traktując jako wewnętrzny problem „sekty" logików i badaczy formalnych podstaw matematyki. Jednakowoż, umysły o nastawieniu interdyscyplinarnym oraz ze skłonnościami do wypracowywania szerszej horyzontalnej syntezy (do których zalicza się autor niniejszych rozważań) nie bardzo są skłonne do takich nie pierwszej świeżości kompromisów metodologicznych czy intelektualnych. Stąd niniejsze „wyznanie wiary" filozofa matematyki takiej, jaką ona jest naprawdę.

W tym miejscu warto zwrócić uwagę na fundamentalną różnicę między „formalną nierozstrzygalnością twierdzenia czy zdania w sformalizowanym systemie matematyki" a nierozwiązywalnością problemu matematycznego. Tylko to drugie pojęcie dotyczy realnej praktyki myślenia matematycznego. Wielki matematyk Dawid Hilbert jest autorem dodającej otuchy badawczej sentencji: *Wir müssen wissen, wir werden wissen* (Musimy wiedzieć, będziemy wiedzieć). Ale czy każdy problem matematyczny będzie prędzej czy później rozwiązany? Zbyt wiele wskazuje, że nie, by popadać w naiwny optymizm. Choć „bez optymizmu nie da się udowodnić twierdzenia matematycznego"[5]. Ponadto, już od czasów Euklidesa z Aleksandrii, autora *Elementów*, znany jest bardzo prawdopodobny kandydat na sensowne zdanie matematyczne, którego prawdziwość nigdy nie będzie rozstrzygnięta. Jest to problem istnienia liczb doskonałych nieparzystych (tj. takich, których suma dzielników mniejszych od niej samej jest im równa; np. 6 czy 28 – w klasie liczb parzystych). Pomimo wielowiekowych poszukiwań i usiłowań, z uwzględnieniem najnowszych technik komputerowych, nie udało się do dzisiaj znaleźć choćby jednej takiej liczby, ani dowieść, że ona nie istnieje. Ponieważ liczb naturalnych jest nieskończenie wiele i są one bardzo indywidualistyczne w swoich własnościach („biologiczny charakter" teorii liczb – A. Schinzel), można sobie wyobrazić, że wielkość i własnościowa specyficzność istniejącej „samej dla siebie"

[5] Jest to motto książki S. Łojasiewicza, *Wstęp do geometrii analitycznej zespolonej*, PWN, Warszawa 1988.

liczby doskonałej nieparzystej przekracza możliwości umysłu ludzkiego uzbrojonego dodatkowo w komputery kwantowe, superkwantowe, hipersuperkwantowe, etc.

Historia matematyki wskazuje, że określone wyżej „praktyczne" pojęcie nierozstrzygalności – nierozwiązywalności problemów matematycznych miał na początku XIX wieku Gauss. Zachęcany przez Olbersa do rozstrzygnięcia prawdziwości Wielkiego Twierdzenia Fermata (WTF) na konkurs Akademii Francuskiej odpowiedział, że nie ma takiego zamiaru, gdyż jego zdaniem problem Fermata nie jest problemem ciekawym, jako że nie wiąże się głęboko z treściwymi pojęciami matematycznymi. Gauss dodał przy tym, że bez trudu może sformułować wiele zagadnień nie dających się rozwiązać ani „na tak", ani „na nie" i nie wartych poświęcania im większej uwagi. Zauważmy „na gorąco", iż w postawie poznawczej księcia matematyków (nb. pochodzenia chłopsko-robotniczego!) zawarta jest pewna głębia aksjologiczno-epistemologiczna . Streszcza się ona wskazaniem, że nie wszystkie problemy matematyczne są warte wysiłku czy usiłowań ich rozstrzygnięcia. W tym jest również pewien moment ontologiczny: kreowanie świata matematyki przez aksjologiczne (estetyczne? – por. poglądy H. Poincaré) jakości, tkwiące niejako w problemach matematycznych, nie zaś tylko przez formalnie poprawne formuły takiej czy innej dziedziny matematycznej. Poprawne formuły matematyczne mogą być „puste". Zwracał na to niejednokrotnie uwagę wybitny matematyk francuski Jean Dieudonné, przeciwstawiając *mathematique vide – mathematique substantive*.

Skonfrontujmy teraz krytyczno-sceptyczną postawę poznawczą Gaussa z wydawałoby się totalnym optymizmem poznawczym Hilberta (*Wir müssen wissen, wir werden wissen*). Ale wcześniej warto przytoczyć pewną znaczącą charakterystykę umysłowości badawczej polskiego geniusza matematycznego, Stefana Banacha, wpisującą się adekwatnie w kontekst Hilbertowski:

> Niech mi wolno będzie powiedzieć od siebie, jako świadkowi pracy Banacha, że miał on jasność myślenia, którą Kazimierz Bartel nazwał raz „aż nieprzyjemną". Nie liczył nigdy na szczęśliwy traf, że sprawdzą się koniunktury pożądane w danej chwili, i chętnie mawiał, że „nadzieja jest matką głupców"; tę pogardę optymizmu stosował nie tylko w matematyce, lecz także do proroctw politycznych. Był podobny do Hilberta w tym, że atakował zagadnienia wprost – po wyłączeniu przez przykłady wszystkich dróg bocznych, koncentrował wszystkie siły na drodze pozostałej, wiodącej prosto do celu – wierzył, że logiczna analiza zagadnienia przeprowadzona tak, jak analizuje szachista trudną pozycję, musi doprowadzić do dowodu lub do obale-

nia twierdzenia. (...) Nie lubował się w dociekaniach logicznych, choć rozumiał je doskonale[6].

Syntetyzując stanowiska poznawcze i metodologiczne Gaussa, Hilberta i Banacha, można stwierdzić, że w gruncie rzeczy wszyscy są poznawczymi optymistami, tyle że umiarkowanymi, *explicite* lub *implicite*. Geniusz matematyczny polega na tym, że „się wie", którymi problemami warto się zajmować, a które można zignorować. Oczywiście, w tej selekcji występują różnice indywidualne – „na najwyższej półce" – jednak są one tonowane przez dyskurs znawców przedmiotu, który w przypadku matematyki jest szczególnie konkluzywny. Ten fenomen potwierdzają między innymi słowa wybitnego matematyka rosyjskiego Mikołaja Łuzina:

Przede wszystkim spotkanie z p. Banachem wywarło na mnie duże wrażenie. O tyle, o ile mogę sądzić, jest on najlepszy (*le plus fort*) ze wszystkich polskich matematyków, a przy tym ma dobry (*vrai*) gust naukowy[7].

Wróćmy jeszcze, dla kontrastu, do nastawienia formalistycznego w epistemologii matematyki. W jego ramach mogą pojawić się na przykład następujące „rewelacje filozoficzne". Otóż, kiedyś w miesięczniku „Delta", przeznaczonym dla nauczycieli nauk ścisłych i zdolniejszych licealistów, przeczytałem następującą dywagację nawiązującą do twierdzenia Gödla o formalnej nierozstrzygalności:

Może pewne problemy teorii liczb, jak np. Wielkie Twierdzenie Fermata, są niezależne od arytmetyki Peany. A czy są one rozstrzygalne na gruncie teorii mnogości? Czy też są od niej niezależne? Pozytywna odpowiedź na to ostatnie pytanie, tzn. pokazanie ich nierozstrzygalności w teorii mnogości byłoby wynikiem o wielkiej doniosłości filozoficznej. Dowodziłoby bowiem ich absolutnej nierozstrzygalności, tzn. nierozstrzygalności za pomocą jakichkolwiek metod i środków dostępnych w matematyce.

Przyjrzyjmy się, co by oznaczała owa „absolutna nierozstrzygalność"? Ano niezależność WTF od systemu teorii mnogości oznacza, że w każdym numerycznym przypadku dla czwórki liczb: *x, y, z* i *n* zachodziłaby nierówność: *n*-ta potęga *x* + *n*-ta potęga *y* nie równa się *n*-tej potędze *z*. Gdyby było przeciwnie, tj. miałaby miejsce choć jedna równość tego typu, to obalałoby to całe WTF i to w sposób tak ele-

[6] H. Steinhaus, *Stefan Banach* [w:] *Wkład Polaków do nauki*, PWN, Warszawa, s. 435–448.

[7] M. Łuzin, *List do Arnauda Denjoy z 1926 r.*, „Wiadomości Matematyczne" XXV (1983), s. 65–66.

mentarny, że niewątpliwie formalizowany w systemie teorii mnogości, co przeczyłoby hipotetycznie udowodnionemu faktowi niezależności WTF od teorii mnogości. Zatem, niewprost, prawdziwe są wszystkie nierówności Fermata, czyli Wielkie Twierdzenie dla wszystkich „normalnych" (standardowych) liczb naturalnych. A oto przecież chodzi w teorii liczb, żeby dowodzić twierdzeń dla intuicyjnych liczb naturalnych. Zatem, w ostatecznym rozrachunku i po prostu, formalnologiczna niezależność twierdzenia teorioliczbowego od systemu teorii mnogości jest metodą dowiedzenia prawdziwości tego twierdzenia, nie zaś jakąś sensacją filozoficzną. Jest to, czy raczej byłaby, metoda bardzo egzotyczna, ale matematycznie skuteczna (por. *metamatematyczny dowód matematyczny* – str. 77 tego artykułu). Dla pełnej jasności dodajmy jeszcze, iż nie ma sprzeczności między formalną nierozstrzygalnością a realnym dowodem dla intuicyjnie danych obiektów matematycznych, gdyż formalne systemy nie mówią o intuicyjnie danych obiektach matematycznych, lecz o dowolnych tworach spełniających aksjomaty systemu.

Wielkie Twierdzenie Fermata zostało już udowodnione bardziej klasycznymi (choć niezwykle trudnymi) metodami, jednak sprawa dotyczy wielu innych, nierozstrzygniętych jeszcze hipotez matematycznych (np. hipotezy Goldbacha). Należy jednak przypuszczać, że taki metamatematyczny dowód twierdzenia teorioliczbowego byłby o kilka, co najmniej, rzędów wielkości trudniejszy od dowodu metodami klasycznymi, nawet tymi najtrudniejszymi. Powiedzmy, jeśli dowód WTF autorstwa Andrew Wilesa potrzebował książki do jego zapisania, to mniemany dowód metamatematyczny (*via* niezależność od systemu teorii mnogości) potrzebować by mógł biblioteki.

Słówko jeszcze o drugiej części niewątpliwie wielkiego formalnologicznego wyniku Gödla, czyli dowodzie niemożności udowodnienia niesprzeczności arytmetyki (teorii liczb) środkami dedukcyjnymi samej arytmetyki. Powszechnie uznano to za obalenie tzw. programu Hilberta: *finitystycznego* dowodu niesprzeczności sformalizowanej arytmetyki i całej matematyki. Ciekawe, że Dawid Hilbert, podobnie jak twórca aksjomatycznej teorii mnogości Ernst Zermelo, nie przyjął do wiadomości takiej konsekwencji twierdzeń Gödla i wraz z P. Bernaysem kontynuował badania nad formalnymi podstawami arytmetyki do późnych lat 30.

Zaś moim zdaniem, z punktu widzenia praktyki myślenia i twórczości matematycznej, program Hilberta nie ma w ogóle sensu. Na przełomie XIX i XX wieku, pod wpływem odkrycia antynomii teoriomnogościowych i wzrostu zainteresowań logiką formalną, pojawił się całkowicie nieuzasadniony lęk przed sprzecznościami w realnej matematyce. *Nota bene*, później sam Gödel stwierdzał, że antynomie teoriomnogościowe mają charakter epistemologiczny, a nie matematyczny. Natomiast w epoce, kiedy Kurt Gödel się rodził, odnoszący światowe sukcesy w tzw. zwykłej (tj. normalnej, mainstreamowej) matematyce Dawid Hilbert, jakby zauroczył się „pięknem" *matematyki metamatematyki* i to zauroczenie nie opuściło go do końca życia. Trzeba przyznać, że tkwi w tym pewien motyw filozoficzny: takie nastawienie można by określić mianem „metodycznej paranoi" *per analogiam* do „metodycznego sceptycyzmu" Kartezjusza z jego *Medytacji o pierwszej filozofii*.

Hilbert był wyjątkiem potwierdzającym regułę. Normalni matematycy nie lękają się sprzeczności (nie mylić z błędami!) w swojej pracy badawczej, albowiem te sprzeczności w ogóle nie występują[8].

3. Można rozróżnić trzy warstwy dowodu matematycznego. Pierwsza – dowód w pełni sformalizowany. Druga – dowód naturalny, czyli to, co znajduje się w naukowych, profesjonalnych czasopismach matematycznych. Trzecia – dowód akcentujący kontekst heurystyczny, istotne motywacje kroków w rozumowaniu. W tej warstwie szczególną rolę odgrywa intuicja. I to intuicja w sensie epistemologicznym, a nie tylko psychologicznym. Intuicja jako władza poznawcza, jako widzenie jak jest, czy jak musi być.

Dowodów w pełni sformalizowanych nikt nie przeprowadza, jeśli pominąć parę przypadków, które są w istocie „wyjątkami potwierdzającymi regułę"[9]. Logicy zajmują się nie konkretnymi dowodami, lecz zbiorami wszystkich możliwych dowodów w systemach sformalizowanych i własnościami strukturalnymi tych zbiorów. Tego rodzaju badania stanowią wartość samą dla siebie. Praktyce uprawiania czy też nauczania matematyki to nie służy.

---

[8] Por. E. Szumakowicz, *Should one fear contradictions?*, Proceedings of the 15-th International Wittgenstein Symposium. Part I. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wiedeń 1933, s. 371–376.

[9] Np. kompletnie sformalizowany dowód twierdzenia Rolle'a w rachunku różniczkowym przedstawiony w *Teorii dowodu podług wykładów uniwersyteckich prof. dr. Jana Sleszyńskiego* w oprac. S. K. Zaremba, Kraków 1929, s. 213–237. Także sformalizowane dowody teorioliczbowych twierdzeń: małego twierdzenia Fermata oraz chińskiego twierdzenia o resztach w książce: A. Grzegorczyk, *Zarys arytmetyki teoretycznej*, PWN Warszawa 1971. *Nota bene*, recenzujący wspomnianą książkę A. Mostowski, mając na uwadze powyższe formalizacje, stwierdził, iż „autor udaje, że uprawia matematykę".

Dowody naturalne, zapełniające naukowe czasopisma matematyczne, są to takie redakcje rozumowań matematycznych, żeby środowisko specjalistów uznało, że ktoś (pierwszy) coś udowodnił. I nic więcej. Nie chodzi tam w żadnej mierze o ułatwienie czytelnikom zrozumienia gry idei prowadzącej do ustalenia prawdziwości twierdzenia. Wręcz przeciwnie, odnosi się wrażenie, iż celem publikacji naukowej jest podanie minimum informacji przekonującej fachowe gremium. Minimum, również po to, by chronić potencjał twórczy autora dowodów.

Dowody z uwzględnieniem szerszego kontekstu heurystycznego rzadko znajdują miejsce w publikacjach matematycznych, zapewne z obawy o rozwlekłość i przegadanie. Z drugiej strony, typowa dla filozofii neopozytywistycznej separacja „kontekstu odkrycia" i „kontekstu uzasadniania" coraz bardziej wydaje się purystyczną przesadą. W matematyce przynajmniej nie ma bowiem wątpliwości, co jest ścisłym dowodem, a co komentarzem. Nawiasem mówiąc, taki logiczny puryzm bardziej przydałby się humanistyce i komunikacji społecznej, gdzie jednak, niestety, nie występuje.

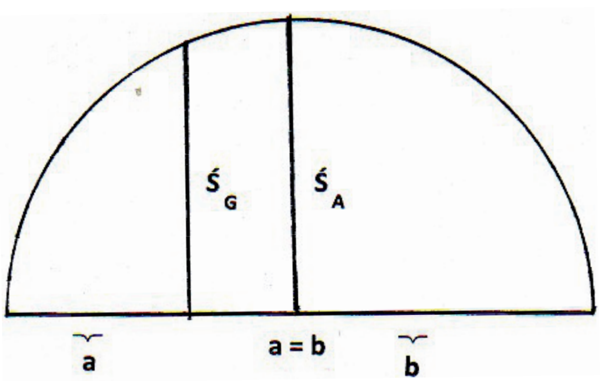
4. Istotnościowa (esencjalna) „tkanka" dowodu matematycznego (à la Bergson?) domaga się od pewnego czasu prawa do ekspresji. Nawet czołowy przedstawiciel polskiej logiki formalnej Andrzej Mostowski, stwierdzał istnienie czegoś takiego jak „istotne" (w kontraście z nieistotnymi) kroki czy przejścia w naturalnej dedukcji matematycznej. Ale ogólne stwierdzenia tego rodzaju są, można powiedzieć, „łatwe" i zazwyczaj niezobowiązujące. Jednak sprawa domaga się, jak uważam, konsekwencji praktycznej, to jest metodycznej ilustracji w zakresie praktyki dowodzenia matematycznego. Co można – w związku z tym i w imię konsekwencji (jeśli powiedziało się „a", to należy powiedzieć co najmniej „b"!) – powiedzieć w tym nieobszernym miejscu, tzn. bez pisania książki? Może kilka przykładów, prostszych i bardziej skomplikowanych.

Przykład 1. Porównywanie średnich arytmetycznej i geometrycznej dwóch liczb prowadzi do prostego, ale i głębokiego twierdzenia, którego dowód warty jest refleksji zarówno metodyczno-dydaktycznej, jak i metodologiczno-epistemologicznej. Bierzemy zatem dwie dowolne liczby rzeczywiste a i b, a następnie pytamy: jak się ma wielkościowo $a+b/2$ do $\sqrt{ab}$? Wiemy, że średnia arytmetyczna jest nie mniejsza od średniej geometrycznej – jak to udowodnić? Otóż, w następujący sposób:

1. Podnosimy obie średnie jako obie strony domniemanej nierówności do kwadratu.
2. Mnożymy, dla pozbycia się ułamkowości, obie strony przez liczbę 4.
3. Przenosimy prawą stronę na lewą, oczywiście ze znakiem ujemnym.
4. Odejmujemy i... otrzymujemy kwadrat różnicy *a* i *b*. I w tym momencie możemy zakrzyknąć: „Eureka!".
5. Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest nie mniejszy od zera. Zerem jest jedynie kwadrat liczby równej zero. W szczególności kwadrat różnicy a-b zeruje się tylko, gdy a=b.
6. Zatem średnia arytmetyczna równa się średniej geometrycznej tylko dla liczb wzajemnie równych. Poza tym jest większa. *QED*.

Ten prosty, ale sugestywny przykład odkrycia matematycznego pokazuje esencjalny mechanizm każdego odkrycia matematycznego: przekształcanie dedukcyjne docelowych formuł (hipotez matematycznych) aż się otrzyma formułę, która jawi się jako intuicyjnie prawdziwa. I nie jest to zazwyczaj aksjomat!

Dodajmy, iż ujawniona w przykładzie prawidłowość ilustruje się geometrycznie (paralelny dowód geometryczny!) następującą konfiguracją:



Pozioma średnica jest sumą: $a + b$. Pionowe odcinki to średnie: geometryczna – $Ś_G$ oraz arytmetyczna – $Ś_A$. Widać, że średnia arytmetyczna jest zawsze taka sama (przy stałej sumie liczb uśrednianych) i równa promieniowi koła. Natomiast średnia geometryczna jest tym większa im mniejsza jest różnica: $a – b$.

Przedstawiony został dowód w sześciu istotnych punktach. Ilość punktów = kroków dedukcyjnych nie jest najistotniejsza, możliwe są bowiem różne redakcje dowodu różniące się nieco rozdziałem rozumowania na poszczególne kroki. Ważne jest to, że ten przykład dowodu jest dobrym punktem wyjścia do zdefiniowania pojęcia dowodu matematycznego w ogóle. Definicja ogólna mogłaby brzmieć następująco:

Dowód matematyczny jest to tekst – program w sposób konieczny, pewny przeprowadzający umysł od zbioru już ustalonych faktów matematycznych do nowego, dotychczas hipotetycznego, faktu matematycznego (ewentualnie zbioru takich faktów).

Jest to definicja operacyjna, korespondująca z tym, co matematycy robią i czego doświadczają. Zauważmy, iż jest ona w gruncie rzeczy odporna na zarzut subiektywizmu. Po prostu, w dyskursie matematycznym subiektywności poszczególnych matematyków intersubiektywizują się, czyli obiektywizują. W innych niż matematyczny dyskursach intersubiektywizacja – obiektywizacja nie jest tak pewna jak w matematyce, co jest swoistym atrybutem królowej nauk.

Przykład 2. Teoria Galois przyciąga uwagę nie tylko matematyków *sensu stricte*, ale i historyków oraz metodologów matematyki. Zawdzięcza to swej niezwykłej spójności logicznej – przy tym szerszym, nie ściśle formalnym, sensie logiki i logiczności. Historyczne i dramatyczne tło odkrycia tej teorii przez dziewiętnastoletniego Ewarysta Galois opisał w swej powieści *Wybrańcy bogów* znany fizyk Leopold Infeld. Pełny akademicki wykład teorii Galois wymaga kilkudziesięciu stron gęstego tekstu przepełnionego licznymi definicjami, lematami, twierdzeniami, wnioskami itp. Niewątpliwe piękno tej teorii jest zaciemnione gąszczem uciążliwych szczegółów. Regularni studenci zaliczają stosowny egzamin, ale nie jestem pewien, czy doświadczają strukturalnego piękna teorii Galois. A czy zdolny licealista, na przykład po lekturze *Wybrańców bogów*, jest w stanie choćby z grubsza uchwycić sens matematyczny tego , co zrodziło się w głowie jego rówieśnika sprzed nieomal dwóch wieków?

Chodzi o rozwiązywanie równań algebraicznych. Przypomnijmy, przyrównujemy wielomian n-tego stopnia o współczynnikach wymiernych do zera. Zasadnicze twierdzenie algebry gwarantuje, że w dziedzinie liczb zespolonych takie równanie ma n pierwiastków. Jak je jednak określić? Może się zdarzyć, że wszystkie pierwiastki są liczbami wymiernymi, czyli należą do dziedziny współczynników równania.

Ale jeśli nie należą do ciała liczb wymiernych, to co robić? Trzeba wtedy „dosypać" do Q jakieś nowe liczby o możliwie prostej budowie i liczyć na to, że pierwiastki równania wyrażą się przez te nowe liczby (oczywiście w kombinacji ze starymi). Do tej roli naturalnymi kandydatami są pierwiastki liczb z dotychczasowej dziedziny współczynników. A dalej, pierwiastki z pierwiastków (najczęściej skombinowanych arytmetycznie z innymi, „wcześniejszymi" liczbami), pierwiastki z pierwiastków z pierwiastków..., etc. – tzw. pierwiastniki (pierwiastki iterowane).

W ten sposób udało się matematykom do czasu włoskiego renesansu uzyskać wzory na pierwiastki równań stopni 2, 3 i 4. W wiekach XVII i XVIII najwybitniejsi matematycy, jak Fermat i Euler próbowali uzyskać podobny wzór dla równań stopnia 5, ale bez rezultatu. Dopiero około roku 1829 licealista Ewaryst Galois zauważył i wykazał, że takiego wzoru być nie może. Gdyby bowiem taki wzór istniał, to „technologia" rozwiązywania równań 5. stopnia przedstawiałaby się jak na poniższym schemacie, który dla skrótu nazwałbym „tapetą Galois". Wspomniana „technologia" rozwiązywania równań piątego stopnia przez pierwiastniki i ostateczne otrzymanie wzoru pierwiastnikowego, przedstawia się strukturalnie następująco. Instruktywne są umieszczone na marginesie analogie: ułamkowa i różniczkowo-ułamkowa. Lewa kolumna przedstawia rozszerzanie wyjściowej dziedziny liczbowej, ciała liczb wymiernych o kolejne pierwiastniki. Istnienie wzorów pierwiastnikowych dla równania 5. stopnia oznacza, że któreś takie rozszerzenie (na schemacie najwyżej położone) obejmie rozszerzenie ciała liczb wymiernych, Q, o wszystkie pierwiastki badanego równania – L. Skrajnie prawa kolumna „tapety Galois" przedstawia tenże proces pierwiastnikowego rozszerzania, ale w aspekcie teoriogrupowym. To jest właśnie nowatorski pomysł młodego Ewarysta: rozszerzeniu o pewien element pierwotnej czy poprzedniej dziedziny odpowiada grupa przekształceń rozszerzonej dziedziny, „nie ruszająca" dziedziny wyjściowej. I dalej, mocą tzw. podstawowego twierdzenia teorii Galois można tę grupę przedstawić bardziej „piętrowo", jako iloraz dwóch innych grup rozszerzeń. Formalnie przypomina to znany z arytmetyki wzór ułamkowy czy też znany z rachunku różniczkowego wzór na pochodną funkcji złożonej. Zamiast dzielenia liczb przez liczby czy różniczek przez różniczki, tutaj dzielimy grupy (przekształceń) przez grupy – jeszcze jedna odmiana dzielenia.

Powyższe operacje doprowadzają nas do kolumny drugiej z lewa, która jest zapisem faktu, że pierwiastnikowo wyrażalna grupa rozsze-

$$\frac{\frac{c}{a}}{\frac{c}{b}}=\frac{b}{a}\,;\quad \frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dz}{dy}}=\frac{dy}{dx}$$

$$\begin{array}{llcl}
K_5=L & G(L/K_5) & \Leftrightarrow & \dfrac{G(L/K_5)}{G(L/K_5)}=G(K_5/K_5) \\
\vee & \quad\wedge & & \\
K_4 & G(L/K_4) & \Leftrightarrow & \dfrac{G(L/K_4)}{G(L/K_5)}=G(K_5/K_4) \\
\vee & \quad\wedge & & \\
K_3 & G(L/K_3) & \Leftrightarrow & \dfrac{G(L/K_3)}{G(L/K_4)}=G(K_4/K_3) \\
\vee & \quad\wedge & & \\
K_2 & G(L/K_2) & \Leftrightarrow & \dfrac{G(L/K_2)}{G(L/K_3)}=G(K_3/K_2) \\
\vee & \quad\wedge & & \\
K_1 & G(L/K_1) & \Leftrightarrow & \dfrac{G(L/K_1)}{G(L/K_2)}=G(K_2/K_1) \\
\vee & \quad\wedge & & \\
K & G(L/K) & \Leftrightarrow & \dfrac{G(L/K)}{G(L/K_1)}=G(K_1/K)
\end{array}$$

$$\frac{G(L/K_i)}{G(L/K_{i+1})}=G(K_{i+1}/K_i);$$

K=Q

Podstawowe twierdzenie Teorii Galois:

$$\frac{G(L/K)}{G(L/M)}=G(M/K)$$

rzeń wyjściowego ciała liczb wymiernych o pierwiastki równania dzieli się przez mniejszą grupę, która z kolei dzieli się przez jeszcze mniejszą, która z kolei... , etc. – aż do otrzymania w wyniku takich dzieleń grupowych grupy jednoelementowej (składającej się tylko z przekształcenia identycznościowego). Istnienie takiego ciągu dzielących się grup jest dla badanego równania 5. stopnia warunkiem koniecznym istnienia wzorów wyrażających pierwiastki tego równania przez pierwiastniki liczbowe!

Z drugiej strony, stwierdzono, że dla większości równań 5-tego stopnia ich grupy rozszerzeń równają się grupie permutacji z 5 elementów, liczącej tym samym 5! (silnia) = 120 elementów. Dla porównania, dla równań 4-tego stopnia ich grupy rozszerzeń liczą w zdecydowanej większości 4! = 24, zaś dla równań 3-go stopnia 3! = 6 elementów. I tu mamy przepaścistą różnicę: grupy „3!” i „4!” dopuszczają zobrazowany w drugiej z lewa kolumnie „tapety Galois” ciąg dzieleniowy grup – podgrup, natomiast grupa „5!” takiego ciągu nie dopuszcza. Zatem, z powodów strukturalnych pierwiastki równań 5-tego stopnia (poza sporadycznymi wyjątkami) nie są wyrażalne przez wzory pierwiastnikowe. Udowodniono, że własność ta dziedziczy się na wszystkie stopnie większe od 5. Można zatem powiedzieć, że istnienie wzorów na pierwiastki równań 2, 3 i 4 stopnia jest rezultatem strukturalnej prostoty dla tych przypadków.

Per analogiam do lingwistyki strukturalnej (N. Chomsky i in.) można by powiedzieć , że odkryta została „struktura głęboka” równań algebraicznych. Tego odkrycia dokonał swego czasu 18-letni Ewaryst Galois. Uważam, że niektórzy dzisiejsi licealiści mogliby już, oczywiście, nie odkryć, ale zrozumieć i odczuć intelektualno-estetyczny „smak” tej pięknej teorii o niezwykłej głębi.

P r z y k ł a d 3. Twierdzenie o liczbach pierwszych.

Jest to jeszcze jedno wyzwanie metodologiczne: aproksymatywne twierdzenie o liczbach pierwszych. Leszek Kołakowski w swoim eseju *Horror metaphysicus* pisze o liczbach pierwszych i wyraża zdziwienie (a ponoć filozofia bierze się ze zdziwienia), że starożytni uczeni zajmowali się czymś tak niepraktycznym, jak liczby pierwsze. Gwiazdy to jeszcze, ale liczby pierwsze?! Tymczasem jest dość sugestywna analogia między rzednięciem gwiazd czy galaktyk w pustkach kosmosu a rzednięciem liczb pierwszych w „kosmosie” liczb naturalnych. To drugie jest w matematyce mierzone specjalną funkcją arytmetyczną oznaczaną grecką literą $\boldsymbol{\pi}$: $\pi(n)$. Inne π niż to najsłynniejsze, geometryczne. Otóż to arytmetyczne *pi(n)* podzielone przez n : $\pi(n)/n$ (po prostu średnia gęstość występowania) dąży do zera, gdy n dąży do nieskończoności. Oznacza to, że liczby pierwsze w coraz to odleglejszych partiach kosmosu liczb naturalnych stają się nieograniczenie czy też dowolnie rzadkie. Wynika to z tego, że $\pi(n)$ jest wielkością bardzo słabo czy też wolno rosnącą. Z analizy matematycznej wiemy, że funkcją słabo lub wolno rosnącą jest logarytm: $log(n)$. Otóż pod koniec XVIII wieku sławni matematycy Gauss i Legendre zauważyli, iż wielkość $\pi(n)\ .\ log(n)/\ n$ dąży do liczby jeden, *1* ! W języku bardziej literackim można to wyrazić tak: wolne rośnięcie pomnożone przez wolne rośnięcie nie jest już tak wolnym rośnięciem! W omawianym przypadku chodzi o wielkości, funkcje *π(.)* i logarytm. Ta prawidłowość może już wzbudzić niemałe zdumienie czy nawet zachwyt u twórczych matematyków. I wzbudziła. Przez cały wiek najwięksi matematycy zajmowali się tym zagadnieniem, tj. próbowali dowieść prawidłowości odkrytej przez Gaussa i Legendre'a. Udało się dopiero pod koniec wieku (1896 r., de la Vallée Poussin i Hadamard), a więc w sto lat od postawienia hipotezy. Do dowodu użyto skomplikowanej aparatury pojęciowej analizy matematycznej zespolonej. Innymi słowy, język twierdzenia, dość przecież elementarny, był inny niż język dowodu tego twierdzenia, pojęciowo bardzo zaawansowany, powiedzielibyśmy „z innej bajki". Toteż dość szybko postawiono pytanie o możliwość dowodu elementarnego.

Na pozytywną odpowiedź trzeba było poczekać pół wieku (1949 r., Selberg, Erdös). W dodatku pojawił się nowy kłopot metodologiczny: dowód elementarny okazał się być nie mniej trudny niż dowód nieelementarny! Nawet więcej – wybitny polski teoretyk liczb Stanisław Knapowski stwierdził swego czasu, że „dowód elementarny jest trudniejszy niż wszystkie dowody analityczne (nieelementarne) razem wzięte"[10]. Zatem pojawiło się kolejne wyzwanie – uproszczenia dowodów elementarnych. W tym kontekście na uwagę i wspomnienie zasługuje postać Michała Kaleckiego, wybitnego ekonomisty i zarazem matematyka amatora (w najpiękniejszym znaczeniu amatorstwa). W wieku ponad sześćdziesięciu lat profesor Kalecki realizował swoje pragnienie upraszczania bardzo trudnych, choć elementarnych, dowodów aproksymatywnego twierdzenia o liczbach pierwszych[11]. Jednak wciąż nie udaje się otrzymać dowodu elementarnego, który byłby do intuicyjnego ogarnięcia w sposób integralny. Ian Richards pisze o tym dość sugestywnie, mając wprawdzie na myśli pierwszy dowód Selberga:

> Pod względem technicznym dowód jest elementarny w tym znaczeniu, że każdy krok dowodu jest elementarny. Lecz dowód jest podzielony na tak wiele etapów i zależności między nimi są tak skomplikowane, że nie otrzymuje się żadnego prostego obrazu całości. Prawdopodobnie jest to nieuniknione. Jak się wydaje, istnieje prawo „zachowania trudności", które mówi, że trudne twierdzenie pozostaje trudnym niezależnie, jak się do niego podchodzi[12].

---

[10] Por. S. Knapowski, *Przegląd niektórych zagadnień analitycznej teorii liczb dotyczących rozkładu liczb pierwszych*, „Wiadomości Matematyczne", vol. VI (1963) s. 128.

[11] Zob. J. Oderfeld i A. Schinzel, *O pracach matematycznych Michała Kaleckiego*, ,,Wiadomości Matematyczne'', XVI (1973), s. 72.

[12] Zob. I. Richards, *Teoria liczb* [w:] L. A. Steen, red., *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów*, Wyd. Nauk. PWN, s. 68.

Ja uważam, a przynajmniej wierzę, że może być inaczej. Usiłowania z poprzedniego przykładu (tapeta Galois) dają podstawy do pewnego optymizmu. Zaś swego rodzaju patronem tego przedsięwzięcia poznawczego – poszukiwania dowodu dającego się ogarnąć „jednym rzutem oka umysłu" – jest, obok wszelkich esencjalizmów, Henri Bergson ze swoim mocnym pojęciem intuicji.

Przykład 4. Hipoteza Riemanna. Nieco ogólniej, problem Riemanna to po prostu rozwiązywanie równania:

$$\zeta(z) = 0$$

Chodzi o słynną funkcję zeta Riemanna, którą ten genialny matematyk wprowadził i przedłużył (rozszerzył) do pełnego zakresu liczb zespolonych, w związku z jego próbą udowodnienia omawianego powyżej twierdzenia o liczbach pierwszych. Sama hipoteza stwierdza, że wszystkie tak zwane nietrywialnie pierwiastki powyższego równania leżą w płaszczyźnie zespolonej na pionowej prostej o odciętej równej ½. Niezwykła regularność, ale do dzisiaj jej nie udowodniono w pełni. Uzyskano różne wyniki cząstkowe typu na przykład: co najmniej jedna trzecia zer nietrywialnych leży na owej prostej krytycznej ($x = ½$), co najmniej 40% zer nietrywialnych leży na prostej krytycznej (nb. od nieomal ćwierćwiecza nie poprawiono tego rezultatu). Można sobie wyobrazić, że proces rozwiązywania problemu Riemanna będzie przebiegał następująco:

Dwa pierwsze etapy, jak wyżej. A dalej:
– ½ zer nietrywialnych leży na prostej krytycznej,
– 2/3 zer nietrywialnych leży na prostej krytycznej,
– ¾ zer nietrywialnych leży na prostej krytycznej,
– 4/5 zer nietrywialnych leży na prostej krytycznej,
– 5/6 zer nietrywialnych leży na prostej krytycznej,
. . . .
– n/n+1 zer nietrywialnych leży na prostej krytycznej
. . . .
– *ad infinitum.*

W tym trybie proces dowodzenia hipotezy Riemanna okazałby się nieskończony. Nie można wykluczyć, że tak będzie, w każdym innym rozkładzie rozwiązań częściowych. Innymi słowy, może nie istnieć (nie być dostępna umysłowi ludzkiemu) jedna całościowa idea obejmująca wszystkie zera nietrywialnie, lecz tylko ciąg idei „mniejszego kalibru" dających rozwiązania częściowe[13]. Uważam, że jest to realny sens absolutnej nierozstrzygalności twierdzeń w matematyce.

5. Tytułem podsumowania i uwag końcowych przytoczmy najpierw sugestywne spojrzenie na matematykę jako taką sławnego polskiego uczonego:

> Odczuwam szczególną – może dla niematematyków niezrozumiałą – analogię między muzyką Chopina a matematyką: muzyka Chopina ma głęboką, często czarującą treść, wyrażoną w formie przystępnej, zrozumiałej dla każdego, choćby trochę muzykalnego słuchacza, podobnie jak bogate w poznawczą treść twierdzenie matematyczne, budzące szczególne emocje estetyczne, a udowodnione w sposób prosty, nieskomplikowany, dostępny dla każdego matematyka na odpowiednim poziomie[14].

Przedłużając wątek muzyko-matematyczny można by zapostulować: po co „komponować" na siłę wciąż nowe i nowe utwory, czy nie lepiej interpretować nowatorsko i oryginalnie stare, dobre, świetne i genialne dzieła? Jak to kiedyś określił wybitny aktor i niedoszły naukowiec Zbigniew Zapasiewicz, to nie jest tylko odtwórczość, to jest, a przynajmniej może być, co najmniej „dotwórczość". Podobnie w matematyce, ukazywanie nowych, głębokich aspektów znanych faktów matematycznych może być bardziej wartościowe niż publikowanie coraz to nowszych, ale niezbyt ciekawych twierdzeń i lematów. Tym bardziej że z naturalnych powodów coraz trudniej jest odkryć coś zarazem nowatorskiego i zajmującego, interesującego dla szerszych kręgów zawodowych. Mniej kompozytorów, więcej wirtuozów (interpretatorów), bo to oni częściej i bezpośrednio dostarczają nam satysfakcji z przeżyć muzycznych i ... matematycznych – można by zakrzyknąć.

Znany krakowski matematyk Andrzej Lasota stwierdzał i pytał na podsumowanie własnej bogatej kariery akademickiej oraz badawczej:

> Po wojnie udowodniono wiele milionów twierdzeń. Ale kto korzysta z milionów twierdzeń? To w dużym stopniu jest produkcja nie nadająca się do niczego innego, jak tylko do wypełnienia pewnych rubryk w formularzach[15].

---

[13] Por. E. Szumakowicz, *Intelektualny spacer po matematyce z domieszką filozofii*, Wyd. Nauk. PK, Kraków 2011, s. 281 i nast. oraz wcześniejszy artykuł: *Między matematyką a filozofią* [w:] Matematyka – Społeczeństwo – Nauczanie, nr 6, WSRP Siedlce 1991, s. 12–15.

[14] K. Kuratowski, *Notatki do autobiografii*, Czytelnik, Warszawa 1981, s. 108.

[15] *Po drogach uczonych*, red. A. M. Kobos, t. 1, Polska Akademia Umiejętności, Kraków 2007, s. 492.

Wypowiedź profesora Lasoty, członka rzeczywistego i czynnego PAN i PAU, w oczywisty sposób koresponduje ze sformułowanym wyżej postulatem metodologiczno-programowym.

Celem tego artykułu jest unaocznienie pewnej intelektualno-poznawczej i kulturotwórczej możliwości. Oto jest możliwe uprawianie filozofii matematyki w bliskości i w interaktywnym sprzężeniu z samą, żywą matematyką. Historycznie rzecz biorąc takie nastawienie poznawcze było już reprezentowane, na przykład przed drugą wojną światową we Francji przez filozofujących matematyków Jeana Cavaillès oraz Alberta Lautmana. Ich zasługi dla zbliżenia filozofii i matematyki doceniał już po wojnie czołowy bourbakista Jean Dieudonné. Zaś w ostatnich dekadach, w USA i Kanadzie, Thomas Tymoczko zachęcał i wzywał matematyków do zajmowania się filozofią matematyki. Zapewne można by wymienić więcej nazwisk badaczy reprezentujących podejście interdyscyplinarne w filozofii matematyki. Tego typu filozofów matematyki nie jest jednak wielu, zwłaszcza jak na kadrowy potencjał zawarty w populacji samych matematyków. Ci ostatni, jak już zwracałem uwagę na początku artykułu, są do filozofii nastawieni nieufnie, lękając się zapewne filozoficznego „zmącenia" umysłów utrudniającego i hamującego karierę naukową w królowej nauk. W konsekwencji popadają oni w inną skrajność, na jaką wskazywał cytowany wyżej Andrzej Lasota. Matematyka jest w tym trendzie pojmowana jako swego rodzaju sport intelektualny będący walką o punkty, nagrody, stopnie i awanse. Czy inna hierarchia wartości ma jakieś szanse?

Filozofowie też nie pomagają, zapewne z lęku przed posądzeniem o nienaukowość. Naukowość w filozofii matematyki próbuje się przy tym uzyskać na dwa sposoby, Pierwszy polega na takim „spreparowaniu" matematyki, żeby można o niej mówić tak jak biolog mówi o tym, co widzi na szkiełku mikroskopu. Żywa, intelektualnie czy poznawczo dynamiczna matematyka staje się preparatem w formalinie, o którym można już formułować nawet matematycznie ścisłe twierdzenia (matematyczna metamatematyka, matematyczne podstawy matematyki itp.).

Drugi sposób unaukowienia filozofii matematyki polega na uprawianiu pod jej mianem historii poglądów z zakresu filozofii matematyki. W ten sposób powstają grube księgi zadowalające tych, którzy mierzą rozwój nauki za pomocą wagi papieru.

Starajmy się przede wszystkim powiedzieć coś ciekawego na temat matematyki, jaką ona jest naprawdę. Jednym, nie jedynym, ale szczególnie ważkim kryterium jest zainteresowanie samych matematyków. Jest to kryterium bardzo trudne do spełnienia, z powodów, które zostały już przedstawione. Niemniej trzeba próbować. Osobiście wierzę, że któraś próba przyniesie efekt typu przełomu. Mój optymizm opiera się na dwóch okolicznościach. Pierwsza to potencjalnie bogate związki metodologii i epistemologii z dydaktyką. Druga to przewidywanie, że społeczeństwo może nie zechcieć finansować działalności naukowej, której rezultaty będą ani piękne, ani użyteczne.

THE INTRINSIC NATURE OF MATHEMATICAL PROOF

Summary

What is a mathematical proof? Is formal logic capable of shedding light on its nature or essence? The author maintains that the answer is negative. Mathematical proof requires a more intrinsic investigation and explanation due to its specific structure. The crucial element is usually situated on the top level of the proof structure, so that an axiomatic basis is as a rule useless in mathematical thinking. The final conclusion is that the formal-logical foundations of mathematics should be complemented with a phenomenology of mathematical thinking. The latter should be developed in a manner that is understandable for ordinary mathematicians. Philosophy would thus show its applicability and usefulness beyond its own purely theoretical and speculative domain. The general should be embodied in the concrete. The author believes that this type of interdisciplinary, philosophico-mathematical research will attract mathematicians to philosophy with profit for their own domain.

Eugeniusz Szumakowicz