Henryk ARODŹ

TEORIA MAJORANY CZĄSTEK O DOWOLNYM SPINIE

1. Tło historyczne

W 1928 roku P. A. M. Dirac zaproponował relatywistyczne równanie falowe dla elektronu [1], obecnie znane jako równanie Diraca. W wypadku elektronu swobodnego ma ono postać:

$$\left(E\, I_4 - c\vec{\alpha}\,\vec{p} - \beta mc^2\right)\psi = 0,$$

gdzie I_4 oznacza macierz jednostkową czwartego stopnia, E jest energią elektronu, $\vec{p}$ – jego pędem, m – jego masą spoczynkową, c oznacza prędkość światła w próżni[1]. W równaniu tym występują hermitowskie macierze czwartego stopnia: $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \beta$, przy czym oczywiście $\vec{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$. Spełniają one następujące warunki:

$$\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i = 2\delta_{ij}I_4, \quad \alpha^i\beta + \beta\alpha^i = 0, \quad \beta^2 = I_4, \tag{1}$$

gdzie indeks i przyjmuje wartości 1, 2, 3.

Dzięki warunkom (1) energia i pęd elektronu nie są niezależne. Mianowicie, można pokazać, iż z równania Diraca, jeśli spełnione są owe warunki, wynika następujący związek:

$$E^2 = c^2\vec{p}^{\,2} + m^2c^4, \tag{2}$$

a z niego wzór na energię cząstki mającej określony pęd,

---

[1] Ta tradycyjna nazwa stałej c jest nieco myląca, bo może sugerować, iż równanie Diraca ma jakieś powiązania z równaniami Maxwella dla pola elektromagnetycznego. Oczywiście związek taki nie istnieje, a stała c pojawia się w obu tych równaniach dlatego, że w istocie charakteryzuje ona czasoprzestrzeń Minkowskiego, w której istnieją zarówno pole elektromagnetyczne, jak i elektron. Lepszymi nazwami byłyby np. „stała Maxwella" lub „stała Minkowskiego".

$$E = \pm c\,\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2c^2}. \tag{3}$$

Równanie Diraca dopuszcza więc, by energia swobodnego elektronu przyjmowała wartości ujemne, przy tym nieograniczone od dołu. Własność ta jest w sprzeczności z faktem, że swobodnych elektronów o energiach ujemnych nigdy nie zaobserwowano.

Powyższa trudność stanowiła przez kilka lat poważną przeszkodę dla uznania równania Diraca za prawidłowe. Ettore Majorana podjął próbę poprawienia tego równania tak, by nowe równanie nie miało problemu z energiami ujemnymi. Zależało mu również na tym, by nowe równanie opisywało cząstki o dowolnym spinie s, a nie jedynie o spinie 1/2, jak to ma miejsce w wypadku równania Diraca. Sądzi się, że Majorana zajmował się tym zagadnieniem w lecie 1932 roku. Uzyskane wyniki opublikował w Nuovo Cimento [2]. Na załączonej reprodukcji pierwszej strony owej pracy (zob. ryc. 1) zwraca uwagę brak daty wpłynięcia do redakcji. Brak też afiliacji autora, co wynika stąd, że w tym czasie Majorana nie miał etatu -- nie był to dla niego problem, bo pochodził z zamożnej rodziny. Dodajmy, że praca zawiera tylko jeden odsyłacz: cytowana jest praca R. Oppenheimera, ale jedynie jako źródło informacji o pracy W. Pauliego na temat sprzężenia anomalnego momentu magnetycznego z polem elektromagnetycznym. Na końcu pracy Majorana zamieścił podziękowanie dla E. Fermiego za dyskusję o proponowanej teorii.

Należy dodać, iż część motywacji – problem ujemnych energii – była w lecie 1932 roku już nieaktualna, ale przypuszcza się, że Majorana o tym nie wiedział. Chodzi o to, że w roku 1931 Dirac podał ostateczną wersję teorii dziur w tzw. „morzu Diraca” i odgadł, że jego równanie opisuje nie jedną, lecz dwie cząstki, mianowicie elektron oraz antyelektron [3]. W tym ujęciu energie ujemne nie tylko przestają być problemem, lecz stają się zaletą. Jeszcze przed końcem roku 1931 antyelektron, obecnie nazywany pozytonem, został odkryty (doniesienie o tym ukazało się w 1932 roku [4]). Interpretowane w ramach kwantowej teorii pól, równanie Diraca stało się jednym z najważniejszych i najpiękniejszych równań współczesnej fizyki. Jest oczywiste, że w tej sytuacji równanie zaproponowane przez Majoranę straciło na znaczeniu.

Niemniej omawiana praca Majorany jest bardzo interesująca w ramach historii fizyki teoretycznej, i to z co najmniej trzech powodów. Wydaje się, że właśnie w tej pracy po raz pierwszy wprowadzono unitarne, nieskończenie wymiarowe reprezentacje grupy Lorentza. Po drugie, również po raz pierwszy zaproponowano równanie opisujące nieskończony multiplet cząstek kwantowych, różniących się masą spoczynkową oraz spinem. Do wątków tych powrócimy poniżej.

Po trzecie, praca Majorany jest bardzo dobrym przykładem na to, że rozwiązywanie zagadek Natury nie jest łatwe. Obecnie wiemy, że idąc drogą wskazaną przez karkołomną i matematycznie bardzo niejasną koncepcję morza Diraca dochodzimy do poprawnego opisu elektronu i pozytonu, a matematycznie klarow-

TEORIA RELATIVISTICA DI PARTICELLE CON MOMENTO INTRINSECO ARBITRARIO

Nota di Ettore Majorana

Sunto. - *L'autore stabilisce equazioni d'onda lineari nell'energia e relativisticamente invarianti per particelle aventi momento angolare intrinseco comunque prefissato.*

La teoria di Dirac dell'elettrone fa uso, come è noto, di una funzione d'onda a quattro componenti delle quali, quando si considerino movimenti lenti, due hanno valori trascurabili mentre le altre due obbediscono in prima approssimazione all'equazione di Schrödinger.

In modo analogo una particella con momento angolare intrinseco $s\frac{h}{2\pi}\left(s=0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots\right)$ è descritta nella meccanica quantistica mediante un complesso di $2s+1$ funzioni d'onda che soddisfano separatamente all'equazione di Schrödinger. Tale rappresentazione è naturalmente valida finchè si trascurano gli effetti relativistici, e ciò è lecito per particelle mobili con velocità piccola di fronte a quella della luce. Un altro caso in cui la teoria elementare è ancora utilizzabile è ovviamente quello in cui la velocità della particella pur essendo comparabile con c rimane quasi costante in direzione e grandezza, poichè allora è possibile ricondursi allo studio di movimenti lenti scegliendo opportunamente il sistema di riferimento.

Il caso invece in cui la velocità delle particelle pur essendo quasi costante entro regioni sufficientemente estese del continuo spazio-tempo varia da una regione all'altra lentamente ma fra valori estremi lontani, sotto l'azione di campi esterni deboli, non si lascia trattare immediatamente con l'equazione non relativistica di Schrödinger.

Una generalizzazione relativistica della teoria precedente deve soddisfare successivamente alle condizioni seguenti al crescere del suo grado di accuratezza:

(a) La teoria permette lo studio di particelle aventi velocità quasi determinata in grandezza e direzione, dando risultati equi-

Ryc. 1. Pierwsza strona pracy E. Majorany [2] ny i błyskotliwie zrealizowany pomysł Majorany okazał się tylko jedną z wielu spekulacji czysto teoretycznych[2].

2. Praca Majorany [2]

Obecność energii ujemnych jest konsekwencją faktu, że hermitowska macierz β musi mieć dodatnie oraz ujemne wartości własne. Jest tak, bowiem ostatni z warunków (1) implikuje, że mogą one być równe +1 lub –1. Następnie, gdyby wszystkie miały ten sam znak, macierz byłaby równa $+I_4$ lub $-I_4$, a wtedy nie można by spełnić przedostatniego warunku (1). Diagonalizując macierz β i podstawiając $\vec{p} = 0$ w równaniu Diraca, otrzymujemy, iż wartości energii elektronu spoczywającego są równe:

$$\pm m\, c^2.$$

Majorana chciał znaleźć równanie falowe liniowe względem E, $\vec{p}$ oraz ψ, opisujące cząstkę o dowolnym ustalonym spinie s oraz dodatniej energii. Zapostulował on równanie postaci

$$\left(E\, I - c\vec{\alpha}\, \vec{p} - \beta M c^2\right) \psi = 0, \tag{4}$$

gdzie I jest operatorem jednostkowym, $\vec{\alpha}$, β to pewne operatory hermitowskie, M jest dodatnią stałą o wymiarze masy. Aby uniknąć energii ujemnych, Majorana założył, że operator β jest dodatnio określony. Ponieważ to ostatnie żądanie jest sprzeczne z warunkami (1), nie oczekujemy związku (2) między E i $\vec{p}$.

Dzięki warunkowi $\beta > 0$, zamiast ψ można równoważnie wprowadzić nową funkcję falową:

$$\tilde{\psi} = \beta^{1/2}\psi,$$

która spełnia równanie

$$\left(\Gamma_\mu p^\mu - McI\right) \tilde{\psi} = 0, \tag{5}$$

gdzie

$$\Gamma_0 = \beta^{-1}, \quad \Gamma_i = -\beta^{-1/2}\, \alpha^i\, \beta^{-1/2}, \quad (p^\mu) = (E/c, \vec{p}).$$

Operatory Γ_μ, gdzie μ = 0, 1, 2, 3, są hermitowskie. Funkcjonał działania odpowiadający równaniu Majorany (5) ma postać:

$$S = \int d^4x\, \tilde{\psi}^\dagger \left(\Gamma_\mu p^\mu - McI\right) \tilde{\psi}.$$

---

[2] Nie można wykluczyć, że w przyszłości równanie Majorany odzyska znaczenie. Oczywiście, raczej nie jako alternatywa dla równania Diraca, lecz, na przykład, w ramach teorii unifikacyjnych tego typu, co popularna obecnie teoria superstrun, gdzie także rozważa się nieskończone multiplety cząstek o różnych masach spoczynkowych i spinach.

Teoria oparta na równaniu (5) będzie niezmiennicza względem transformacji Lorentza $x' = Lx$, gdy pokażemy, że istnieje reprezentacja $S(L)$ grupy Lorentza taka, że:

$$\tilde{\psi}'(x') = S(L)\tilde{\psi}(x), \quad S^\dagger(L)S(L) = I$$

oraz

$$S^\dagger(L)\Gamma_\mu S(L) = L_\mu{}^\nu \Gamma_\nu .$$

Potrzebna jest więc unitarna reprezentacja grupy Lorentza, a także operatory Γ_μ tworzące czterowektor względem tej reprezentacji.

W 1932 roku unitarne reprezentacje grupy Lorentza nie były znane. Majorana podał w swojej pracy dwie takie reprezentacje, a następnie znalazł operatory Γ_μ. Przypuszcza się, że wykorzystał pewne wzory z książki H. Weyla, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, wydanej w 1928 roku. Jak obecnie wiemy, są to jedyne dwie reprezentacje unitarne grupy Lorentza, w których takie operatory istnieją [5]! Nazywane są one reprezentacjami Majorany grupy Lorentza. Nie ulega wątpliwości, że Majorana był ekspertem w dziedzinie teorii grup i ich reprezentacji. Zamierzał nawet napisać monografię z tej dziedziny. Obecnie znajomość teorii reprezentacji grup wynosi się z uniwersyteckich studiów fizyki, ale w tamtych czasach było zupełnie inaczej.

Swoje reprezentacje grupy Lorentza Majorana podał w wersji infinitezymalnej, tj., na poziomie algebr Liego. Niech $\vec{J} = (J_1, J_2, J_3)$ oznacza generatory obrotów, $\vec{N} = (N_1, N_2, N_3)$ zaś generatory pchnięć (*boosts*). Operatory J_i mają znaną z podręczników mechaniki kwantowej realizację jako macierze w bazie spinowej $|jm\rangle$, gdzie $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$ oraz $m = j, j-1, \ldots, -j+1, -j$. Wprowadźmy pomocnicze operatory $N_\pm = N_1 \pm iN_2$. W wypadku reprezentacji Majorany, operatory $N_\pm, N_3$ mają następującą realizację w bazie spinowej:

$$\begin{aligned} N_+ |jm\rangle = {} & \tfrac{i}{2}\sqrt{(j-m)(j-m+1)}\, |j-1, m+1\rangle \\ & + \tfrac{i}{2}\sqrt{(j+m+1)(j+m+2)}\, |j+1, m+1\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_- |jm\rangle = {} & -\tfrac{i}{2}\sqrt{(j+m)(j+m-1)}\, |j-1, m-1\rangle \\ & - \tfrac{i}{2}\sqrt{(j-m+1)(j-m+2)}\, |j+1, m-1\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_3 |jm\rangle = {} & \tfrac{i}{2}\sqrt{(j+m)(j-m)}\, |j-1, m\rangle \\ & - \tfrac{i}{2}\sqrt{(j+m+1)(j-m+1)}\, |j+1, m\rangle. \end{aligned}$$

We wzorach tych j może przyjmować dowolnie duże wartości całkowite lub połówkowe, a mianowicie $j = j_0,\ j_0+1,\ j_0+2, \ldots,$ gdzie $j_0 = 0$ lub $1/2$.

Jeśli chodzi o operatory Γ_μ, Majorana podaje ich elementy macierzowe w bazie spinowej, pomijając wyprowadzenie, o którym pisze jedynie, że jest łatwe.

Szczególnie interesujący jest operator Γ_0, bowiem gdy $\vec{p} = 0$, równanie Majorany (5) przyjmuje postać:

$$(\Gamma_0 p^0 - McI)\tilde{\psi} = 0. \tag{6}$$

Stąd wynika, że widmo energii cząstek spoczywających, czyli widmo mas, jest określone przez odwrotności wartości własnych właśnie Γ_0. Okazuje się, że w bazie spinowej operator ten jest diagonalny:

$$\langle j'm'|\Gamma_0|jm\rangle = \left(j + \frac{1}{2}\right) \delta_{j'j}\, \delta_{m'm}.$$

Z równania (6) otrzymujemy, że

$$E_j \equiv M_j\, c^2 = \frac{Mc^2}{j + 1/2},$$

gdzie $j = j_0,\ j_0 + 1$, przy czym $j_0 = 0$ lub 1/2. Otrzymane widmo mas:

$$M_j = \frac{M}{j + 1/2}$$

zawiera się w przedziale $(0, M]$ (gdy $j_0 = 1/2$) lub $(0, 2M]$ (gdy $j_0 = 0$) i zagęszcza się w pobliżu zera. O ile mi wiadomo, obiekt fizyczny o takim widmie mas dotychczas nie jest znany. Jest jasne, że miałby on nieskończenie wiele stopni swobody. Pod tym względem byłby on podobny do współcześnie rozpatrywanych strun relatywistycznych.

Pracę [2] zamyka kilka uwag. Najpierw Majorana pisze, że jeśli zadamy składowe ψ o określonym spinie s, to składowe o spinach $j \neq s$ są rzędu $(v/c)^{|j-s|}$, gdzie v jest prędkością cząstki. Zatem znikają one w granicy nierelatywistycznej, tzn. gdy $v/c \to 0$.

Następnie Majorana zauważa, iż jego równanie posiada także rozwiązania tachionowe, dla których $p_0^2 - \vec{p}^{\,2} = -M^2/\sigma^2$, $\sigma > 0$. W tym wypadku niemożliwe jest przejście za pomocą transformacji Lorentza do układu odniesienia takiego, że $\vec{p} = 0$. O widmie mas decydują teraz własności operatorów Γ_i, a nie Γ_0. Później inni autorzy odkryli też rozwiązania równania (5) opisujące cząstki bezmasowe.

Końcowe półtorej strony Majorana poświęcił na wprowadzenie oddziaływania z polem elektromagnetycznym. Użył zasady sprzężenia minimalnego, powszechnie stosowanej w czasach dzisiejszych, ale w roku 1932 mającej zaledwie kilka lat (F. London 1927, V. Fock 1927).

Współczesny czytelnik tej pracy Majorany może być zaskoczony tym, że nie sprawia ona wrażenia pracy anachronicznej. Myślę, że po nieznacznym skróceniu kilku fragmentów z powodzeniem nadawałaby się do opublikowania w bieżącym tomie Physical Review D.

3. Epilog

1. Równanie Majorany (5) było ponownie odkrywane przez innych autorów, nie znających pracy Majorany, np. przez znanych matematyków I. M. Gelfanda i A. M. Yagloma [6]. Pracę Majorany dostrzeżono dopiero po artykule D. M. Fradkina [7]. Później ukazały się kolejne publikacje, np. [5, 8, 9].

Równanie Majorany daje nietrywialne spektrum mas. Może być uważane za prekursora podobnych równań, postulowanych w latach 50. minionego stulecia i później. Ten kierunek badań rozkwitł pod koniec 20. wieku, głównie za sprawą kwantowej teorii (super)strun.

Jedna z prac z lat 50., mianowicie praca V. L. Ginzburga [10], notabene noblisty z 2003 roku, zawiera interesujący wątek krakowski. U dołu jej strony tytułowej znajduje się następująca notatka:

> This paper has been prepared on the basis of a lecture delivered by the author on April 4, 1955, at the All-Union Conference on Quantum Electrodynamics and Theory of Elementary Particles. The appearance of this paper in a Polish Physical journal seemed appropriate, because of the great attention paid by Polish physicists to non-local field theory and to the above-mentioned class of relativistic wave equations.

W spisie literatury V. L. Ginzburg zamieścił 4 prace profesora Jerzego Rayskiego z lat 1953–1955, poświęcone, m.in., bilokalnym polom Yukawy.

2. Pełną teorię unitarnych, nieredukowalnych reprezentacji grupy Lorentza podano w latach 40. Pracowali nad tym zagadnieniem m.in. P. A. M. Dirac (1945), I. M. Gelfand i M. A. Naimark (1946), Harish-Chandra (1947) oraz V. Bargmann (1947). Niestety, nie znali oni pracy Majorany [2]. Nie ulega wątpliwości, że właśnie on jako pierwszy skonstruował takie reprezentacje.

3. Kwantowe równania falowe dla cząstek o dowolnym ustalonym spinie i masie m konstruowano w latach 40. i 50. w oparciu o skończenie wymiarowe, nieunitarne reprezentacje grupy Lorentza (Dirac, Fierz, Pauli, Kemmer i inni). Żądano przy tym aby jednak spełniony był związek:

$$E^2 = c^2\vec{p}^{\,2} + m^2c^4.$$

Było to więc podejście zupełnie inne niż zaproponowane przez Majoranę. Pogląd, że należy oprzeć się na nieunitarnych reprezentacjach grupy Lorentza stał się obowiązujących kanonem. Napotkano jednak szereg trudności, zwłaszcza gdy próbowano włączyć oddziaływania takich cząstek.

Problemy te utraciły aktualność w wyniku rozwoju kwantowej teorii pól relatywistycznych. Obecnie cząstki ze spinem są wiązane przede wszystkim z unitarnymi, nieredukowalnymi reprezentacjami grupy Poincaré (E. P. Wigner, 1939), a nie grupy Lorentza. Równania falowe dla cząstek wynikają z kwantowej teorii pól. Równania te nie przewidują ujemnych wartości energii. Na przykład, dla swobodnego elektronu otrzymujemy nie równanie Diraca, lecz równanie:

$$i\hbar\,\partial_t\psi = +c\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2c^2}\;\psi,$$

gdzie ψ jest spinorem dwuskładnikowym.

Literatura

[1] Dirac P. A. M., *The quantum theory of the electron*, Proc. Roy. Soc. (London) A117 (1928): 610–624; *The quantum theory of the electron. Part II*, ibidem, A118 (1928): 351–361.

[2] Majorana E., *Teoria relativistica di particelle con momento intrinseco arbitrario*, Nuovo Cimento 9 (1932): 335–344.

[3] Dirac P. A. M., *Quantized singularities in the electromagnetic field*, Proc. Roy. Soc. (London) A133 (1931): 60–72.

[4] Anderson C. D., *The apparent existence of easily deflectable positives*, Science 76 (1932): 238–239.

[5] Casalbuoni R., *Majorana and the Infinite Component Wave Equation*, preprint hep-th/0610252.

[6] Gelfand I. M. i Yaglom A. M., Zh. Eksp. Teor. Fiz. 18 (1948): 703.

[7] Fradkin D. M., *Comments on a Paper by Majorana Concerning Elementary Particles*, Am. J. Phys. 34 (1966): 314.

[8] Esposito S., *Four variations on Theoretical Physics by Ettore Majorana*, arXiv: physics/0604064 (2006).

[9] Plyushchay M. S., *Majorana equation and exotics: higher derivative models, anyons and noncommutative geometry*, arXiv:math-ph/0604022 (2006).

[10] Ginzburg V. L., *On relativistic wave equations with a mass spectrum*, Acta Phys. Pol. 15 (1956): 163.

Abstract

Majorana's paper on infinite component wave equation is presented together with related historical background.